Chapitre 11 : Équations différentielles linéaires (prof)

Table des matières

1 Calcul de primitives

1.1 Définition

Définition 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que
$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Exemple 2. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3. La fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

1.2 Primitives usuelles

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$x \mapsto \lambda$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \lambda x$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto \mathbf{e}^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathbf{e}^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$x \mapsto \cos(\lambda x)$ pour $\lambda \neq 0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{\sin(\lambda x)}{\lambda}$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \sin(\lambda x)$ pour $\lambda \neq 0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{-\cos(\lambda x)}{\lambda}$
$x \mapsto \tan(x)$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$	$-\ln(\lvert\cos\rvert)$
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto x\ln(x) - x$

1.3 Primitives de composées de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.

Fonction f	Primitive F sur I
$u'u^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u'\mathbf{e}^u$	$\mathbf{e}^u$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$

Fonction f	Primitive F sur I
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$

1.4 Existence

Théorème 4.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est continue sur I alors f admet des primitives sur I.

Théorème 5.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Soit F une primitive de f sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I est

$$\{F + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 6. Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$.

2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Définitions

Définition 7.

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre une équation de la forme

$$(E)\ :\ y' + a(t)y = f(t)$$

où a et f sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résoudre (E) sur un intervalle J, c'est trouver l'ensemble des fonctions $y : J \to \mathbb{R}$ dérivables sur J et qui vérifient (E) :

$$\forall t \in J,\ y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

Exemple 8. Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est une solution de l'équation $y' + \dfrac{1}{t^2}y = 0$.

2.2 Résolution d'une équation homogène du premier ordre

Théorème 9 (Homogène, 1^{er} ordre, coefficients constants)**.**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit l'équation $(E_H) : y' + ay = 0$.

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-at},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple 10. Résoudre l'équation $y' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 11 (Homogène, 1^{er} ordre).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a : I \to \mathbb{R}$, continue sur I. Soit $(E_H) \ : \ y' + a(t)y = 0$.
L'ensemble $\mathcal{S}_H(I)$ des solutions sur I est

$$\mathcal{S}_H(I) = \left\{ t \in I \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-A(t)}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

où A est une primitive de a sur I.

Exemple 12. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $y' - \dfrac{1}{t}y = 0$.

Exemple 13. Résoudre l'équation $y' - \tan(t)y = 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2.3 Résolution d'une équation avec second membre.

2.3.1 Recherche d'une solution particulière

Exemple 14. Trouver une solution particulière de l'équation $y' + ty = t$.

Exemple 15. Trouver une solution particulière de l'équation $y' \sin(t) + y \cos(t) = \sin(2t)$.

Théorème 16 (Variation de la constante).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a : I \to \mathbb{R}$, continue sur I.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I.
Soit $(E) \ : \ y' + a(t)y = f(t)$.
Il existe des solutions particulières de la forme $y_p : t \in I \mapsto \lambda(t)\mathbf{e}^{-A(t)}$ où λ est une fonction définie et dérivable sur I et A une primitive de a sur I.

Exemple 17. Déterminer une solution particulière de l'équation $y' - \dfrac{1}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$.

2.3.2 Résolution d'une équation avec second membre

Théorème 18 (1^{er} ordre).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a : I \to \mathbb{R}$, continue sur I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I.
Soit $(E) \ : \ y' + a(t)y = f(t)$.
L'ensemble S des solutions de (E) sur I est

$$S = \left\{ t \in I \mapsto y_p(t) + \lambda \mathbf{e}^{-A(t)}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

où A est une primitive de a sur I et y_p une solution particulière.

Autrement dit,

$$S = \{ y_p + y_h, \ y_h \text{ solution de } (E_H) \}$$

où y_p une solution particulière et (E_H) l'équation $y' + a(t)y = 0$.

Exemple 19. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + 2y = -1$.

Exemple 20. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - y = \cos(t) - \sin(t)$.

Exemple 21. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathbf{e}^t}$.

Methode 1 (1^{er} ordre)**.**

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre sur un intervalle I,

1. on résout l'équation homogène associée (E_H) sur I,
2. on cherche une solution particulière sur I,
3. on additionne ces deux solutions pour obtenir les solutions de (E) sur I.

Il y a une infinité de solutions à l'équation (E_H) donc une infinité de solutions à (E).

2.3.3 Principe de superposition

Théorème 22.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, f : I \to \mathbb{R}$, continues sur I.

Soit $(E)\ :\ y' + a(t)y = f(t)$ avec $\forall t \in I,\ f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(t)$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, soit y_k une solution sur I de $(E_k)\ :\ y' + a(t)y = f_k(t)$.

Alors, la fonction définie par $y_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de (E).

2.3.4 Avec des conditions initiales

Théorème 23.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, f : I \to \mathbb{R}$, continues sur I.
Soient $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.
Il existe une unique fonction solution sur I du système suivant :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Remarque 24.

- La condition initiale impose la valeur de λ dans le théorème 17.
- Ce théorème permet de démontrer l'existence de la fonction exponentielle.

Exemple 25. Résoudre sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ le système $\begin{cases} y' + y\tan(t) = \sin(2t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 26.

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une équation de la forme

$$(E)\ :\ y'' + ay' + by = f(t)$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et f est une fonction définie et continue sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3.1 Résolution d'une équation homogène du second ordre

Théorème 27 (Homogène, 2^{nd} ordre, coefficients constants)**.**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Soit $(E_H)\ :\ y'' + ay' + by = 0$.
Notons $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique $\mathbf{X}^2 + a\mathbf{X} + b = 0$.

1. Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 et l'ensemble des solutions de l'équation (E_H) sur $\mathbb{R}$ est
$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto A\mathbf{e}^{r_1 t} + B\mathbf{e}^{r_2 t},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique racine r_0 et l'ensemble des solutions de l'équation (E_H) sur $\mathbb{R}$ est
$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto (At + B)\mathbf{e}^{r_0 t},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
3. Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathbf{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathbf{i}\beta$ et l'ensemble des solutions de l'équation (E_H) est
$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto \mathbf{e}^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)),\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exemple 28. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Exemple 29. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \alpha^2 y = 0$.

3.2 Résolution d'une équation du second ordre avec second membre

Théorème 30 (2^{nd} ordre, coefficients constants)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, continue sur I. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
Soit $(E)\ :\ y'' + ay' + by = f(t)$.

$$S = \{y_h + y_p,\ y_h \text{ solution de } (E_H)\}$$

où y_p est une solution particulière de (E).

Exemple 31. Résoudre l'équation $y'' + 4y = 1$.

Exemple 32. Résoudre l'équation $y'' + y = \cos(2t)$.

Methode 2 (2^{nd} ordre)**.**

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sur $\mathbb{R}$,

1. on résout l'équation homogène associée (E_H) sur $\mathbb{R}$,
2. on cherche une solution particulière (forme souvent donnée sauf si f est constante),
3. on additionne ces deux solutions pour obtenir les solutions de (E).

Il y a une infinité de solutions à l'équation (E_H) donc une infinité de solutions à (E).

3.3 Principe de superposition

Théorème 33.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, continue sur I avec $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, soit y_k une solution sur I de $(E_k)\ :\ y'' + ay' + by = f_k(t)$.

La fonction définie par $y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de (E).

Exemple 34. Résoudre dans $\mathbb{R}$ de $y'' - 3y' + 2y = \mathbf{e}^{-t} + 1$.

3.4 Avec conditions initiales

Théorème 35.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I.
Soient $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R}^2$.
Il existe une unique fonction solution sur I au système suivant :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Remarque 36. Les conditions initiales permettent de déterminer les réels A et B du théorème 26.

Exemple 37. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système suivant $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$