

Exercice 1 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle I à préciser.

1. $f : x \in I \mapsto e^{3x}$.
2. $f : x \in I \mapsto \sin\left(\frac{x}{5}\right)$.
3. $f : x \in I \mapsto x^5 - 3x + 1$.
4. $f : x \in I \mapsto \ln(x + 1)$.
5. $f : x \in I \mapsto \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
6. $f : x \in I \mapsto xe^{x^2}$.
7. $f : x \in I \mapsto \cos(x) \sin^3(x)$.
8. $f : x \in I \mapsto \frac{x}{x^2 + 4}$.
9. $f : x \in I \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Exercice 2 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos^2(x) \sin^3(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $f(x)$.
2. En déduire une primitive de f sur \mathbb{R} .

Exercice 3 Soit $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 - 1}$.

1. Déterminer tous les intervalles I sur lesquels f admet des primitives.
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall t \in]-1, 1[, f(t) = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$$

3. En déduire une primitive de f sur $] -1, 1[$.

Exercice 4 Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + 2y = 0$ sur \mathbb{R} .
2. $y' + y = 4e^t$ sur \mathbb{R} .

3. $y' - 3y = e^t + 3$ sur \mathbb{R} .

On pourra appliquer le principe de superposition pour trouver une solution particulière.

4. $y' + \tan(t)y = \cos(t)$ sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
5. $(1 - t^2)y' - 2ty = t^2$ sur $I =]-1, 1[$.

Exercice 5 Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = \sin(t)$

On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto A \cos(t) + B \sin(t)$.

2. $y'' - 3y' + 4y = 6x^2 + 1$

On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré au plus 2.

3. $y'' - y' - 6y = e^{3t} + \sin(t)$

On applique le principe de superposition et on cherchera une solution particulière de $y'' - y' - 6y = e^{3t}$ sous la forme $t \mapsto Ate^{3t}$ et pour $y'' - y' - 6y = \sin(t)$ sous la forme $t \mapsto A \cos(t) + B \sin(t)$.

Exercice 6 Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + y = \frac{1}{1 + e^t}$ sur \mathbb{R} avec $y(0) = 1$.

2. $y'' + y' - 2y = 1$ sur \mathbb{R} avec $y(0) = y'(0) = 0$.

3. $y'' = 1$ sur \mathbb{R} avec $y(0) = y'(0) = 1$.

4. $y'' + 9y = x^2 + 1$ sur \mathbb{R} avec $y(0) = y'(0) = 0$.

On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré au plus 2.

Exercice 7 On cherche à résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation suivante

$$(E) : t^2 y'' + 4ty' - (t^2 - 2)y = 0$$

1. Pour $t \in]0, +\infty[$, on pose $z(t) = t^2 y(t)$.
Calculer z' et z'' .
2. En déduire une équation différentielle linéaire (E') dont z est solution.
3. Résoudre cette équation (E') .
4. En déduire les solutions de l'équation initiale (E) .