

Programme de colles n° 11

du 8 au 12 décembre 2025

Chapitre 10 – Dénombrement

1. Cardinal d'un ensemble
2. p –listes d'un ensemble
3. p –listes sans répétition
4. p –combinaisons d'un ensemble
5. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble E .
6. Cardinal d'une union, d'une intersection ou d'un produit cartésien.

Chapitre 11 – Equations différentielles linéaires

1. Recherche de primitives usuelles.
2. Equations différentielles linéaire du premier ordre : résolution par variation de la constante.
3. Equations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants : La forme de la solution particulière est donnée, sauf quand le second membre est constant.
4. Prise en compte de conditions initiales.

Questions de cours.

1. Soit E un ensemble de cardinal n . Soit $p \leq n$.
Donner la définition d'une p –liste et **démontrer** la valeur du cardinal de l'ensemble des p –listes.
(Chap 10, def 5 thm 8.)
2. Soit E un ensemble de cardinal n . Soit $p \leq n$.
Donner la définition d'une p –liste sans répétition et **démontrer** la valeur du cardinal de l'ensemble des p –listes sans répétition.
(Chap 10, def 10 et thm 13.)
3. Soit E un ensemble de cardinal n .
Énoncer et démontrer la formule pour la cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
(Chap 10, thm 25.)
4. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ est inclus dans $F = \{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda^{-at}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
(Chap 11, thm 9).
5. Résolution de l'équation $y'' + \alpha^2 y = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
(Chap 11, ex 29).
6. Pour une équation de la forme $y'' + ay' + by = 0$, donner les trois formes possibles pour l'ensemble des solutions.
(Chap 11, thm 27).

Tournez s'il vous plait.

Outils 7 – Dénombrement

Le but de ce chapitre est de mettre en place un vocabulaire efficace pour décrire (ou modéliser) et analyser les problèmes combinatoires, ainsi que quelques résultats fondamentaux associés. Les résultats de ce chapitre seront justifiés intuitivement, sans recours à des démonstrations formelles. De façon générale, on évitera tout excès de technicité dans les dénombrements.

Tous les ensembles considérés dans ce chapitre sont finis.

Dans les définitions qui suivent, on suppose que $\text{card}(E) = n$.

Contenus	Commentaires
Cardinal, notation $\text{card}(E)$ ou $\#E$.	On définit le cardinal grâce à la notion intuitive de nombre d'éléments. En particulier, deux ensembles en bijection ont même cardinal.
Cardinal d'une union disjointe.	
Formule $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$.	

Contenus (suite)	Commentaires
Cardinal d'un produit cartésien.	$\text{card}(E \times F)$ est aussi le nombre de façons de choisir de façon indépendante un élément de E et un élément de F .
Un élément de E^p est appelé un p -uplet ou une p -liste de E . Il y a n^p p -uplets de E .	$\text{card}(E^p)$ est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n objets distincts, avec d'éventuelles répétitions.
Un p -uplet est dit sans répétition lorsque ses éléments sont distincts deux à deux. Il y a $n(n-1) \cdots (n-p+1)$ p -uplets sans répétition de E . Un n -uplet de E contenant exactement une fois chaque élément de E est appelé une permutation de E . Il y a $n!$ permutations de E .	Le nombre de p -uplets sans répétition est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n objets distincts, sans répétition. $n!$ est le nombre de façons de choisir successivement tous les objets d'un ensemble, sans répétition.
Si $p \leq n$, une p -combinaison de E est une partie de E à p éléments. Il y a $\binom{n}{p}$ p -combinaisons de E . Cardinal de l'ensemble des parties de E .	$\binom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir simultanément p objets parmi n objets distincts. On peut sur cette base réinterpréter la formule du binôme.

c) Calculs de primitives Primitives usuelles et calculs simples de primitives.	Primitives de $u' e^u$, $u' u^n$, u' / u , $u' / \sqrt{u}$, $u' \sin u$, $u' \cos u$.
--	--

Analyse 4 – Équations différentielles linéaires simples

L'objectif de ce chapitre est de rappeler et d'approfondir la problématique des équations différentielles, en vue des usages qui en sont faits en physique, chimie, biologie.

Contenus	Commentaires
a) Équations du premier ordre Résolution de $y' + a(t)y = f(t)$ où a et f sont des fonctions continues sur un intervalle : - résolution de l'équation homogène associée, cas particulier où a est constante, - principe de superposition, - méthode de variation de la constante, - cas particulier où a et f sont constantes.	Pour toute autre équation différentielle du premier ordre, une méthode de résolution doit être fournie. $\Rightarrow$ On peut montrer des exemples tirés de la physique-chimie : cinétique d'une réaction, charge d'un condensateur, système physique en contact avec un thermostat, ...
b) Équations du second ordre Résolution de $ay'' + by' + cy = f(t)$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle : - résolution de l'équation homogène associée, - principe de superposition, - détermination d'une solution particulière.	La résolution de l'équation homogène se fera à l'aide de l'équation caractéristique. On pourra à cette occasion introduire la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C} : t \mapsto e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbf{C}$. $\Rightarrow$ On peut traiter en exemple l'équation de l'oscillateur harmonique $y'' + \omega^2 y = 0$ dont les solutions sont présentées sous diverses formes ; et par extension aux sciences physiques dériver et chercher une primitive à $t \mapsto e^{i\omega t}$. La forme d'une solution particulière est donnée sauf lorsque f est une fonction constante. Par exemple, lorsque f est de la forme $t \mapsto \sin(\omega t)$ ou $t \mapsto \cos(\omega t)$, l'énoncé devra indiquer de chercher une solution du type $t \mapsto \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto \lambda t \sin(\omega t) + \mu t \cos(\omega t)$, λ et μ étant à déterminer.