Chapitre 13 : Matrices (prof)

Table des matières

1 Ensembles des matrices et opérations

1.1 Définitions et notations

Définition 1.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
On appelle matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ un tableau à n lignes et p colonnes formé d'éléments de $\mathbb{R}$.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & & & \vdots & \\ m_{i1} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & \\ m_{n1} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{np} \end{pmatrix}$$

On note également $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

Définition 3.

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
On note $0_{n,p}$ la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 4.

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Si $p = 1$, on dit que A est une matrice colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2. Si $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_p \end{pmatrix}$$

1.2 Matrices carrées

Définition 5.

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Lorsque $n = p$, on dit que A est une matrice carré.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définition 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est une matrice diagonale lorsque ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j \neq i$$
$$;,\ a_{ij} = 0$$

Exemple 7. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Exemple 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est **la matrice identité de taille n.**

Définition 9.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On dit que A est une matrice triangulaire supérieure lorsque ses coefficients en dessous de la diagonale sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{in} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j < i \Rightarrow a_{ij} = 0$$

2. On dit que A est une matrice triangulaire inférieure lorsque ses coefficients au dessus de la diagonale sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j > i \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Exemple 10. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition de matrices et multiplication par un scalaire

Définition 11 (Addition).

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle somme de A et de B la matrice notée $A + B$ et définie par

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{ip} + b_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nj} + b_{nj} & \dots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Théorème 13.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ non nuls.

1. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,\ A+B = B+A$.
2. $\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^3,\ (A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ A+0_{n,p} = 0_{n,p}+A = A$

Définition 14 (Multiplication par un scalaire)**.**

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ non nuls.
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle <u>multiplication de A par λ</u> la matrice notée λA et définie par

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots & \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

<u>**Exemple 15.**</u> $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 15 \end{pmatrix}$

Théorème 16.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ non nuls.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
3. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

2.2 Produit matriciel

Définition 17.

Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls.
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

On appelle produit de A par B la matrice notée $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, définie par

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ b_{i1} & \dots & \dots & b_{ij} & \dots & b_{iq} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ b_{p1} & \dots & \dots & b_{pj} & \dots & b_{nq} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} & \dots \\ \dots & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{nk}b_{kq} \end{pmatrix} = AB \end{array}$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, q]\!],\ (A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Exemple 18. On souhaite calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Le résultat est une matrice de taille 2×2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\text{avec chaque colonne}]{\text{On multiplie chaque ligne}} \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1+3+10 & 2+4+12 \\ 2+6+15 & 4+8+18 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 23 & 30 \end{pmatrix}$

Remarque 19. Le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ n'est pas défini car le nombre de colonnes de la première matrice est différent du nombre de ligne de la deuxième.

Remarque 20. La multiplication matricielle n'est pas commutative.
Même lorsque les produits AB et BA sont bien définis, on peut avoir $AB \neq BA$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}$ alors que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 17 & 24 \end{pmatrix}$.

Exemple 21. Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que remarquez-vous ?

Théorème 22.

Soit $(n,p,q,r) \in \mathbb{N}^4$ tous non nuls.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda AB.$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ \forall D \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}),\ A \times (BD) = (AB) \times D.$
3. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,\ \forall D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ (A+B) \times D = AD + BD.$
4. $\forall D \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R}),\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,\ D \times (A+B) = DA + DB.$

2.3 Ecriture matricielle d'un système et rang d'une matrice

Exemple 23. Soit le système $\Sigma : \begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ d'inconnues $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
En posant $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on remarque que

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 2x + y = 8 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow AX = B \end{aligned}$$

Définition 24.

Soient $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit le système

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i & (L_i) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

On appelle <u>matrice associée</u> à ce système la matrice dont les coefficients sont ceux du système

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

En notant $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice inconnue, le système Σ s'écrit $AX = B$.

Définition 25.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On peut lui associer le système $AX = 0$.

On appelle <u>rang de A</u> le rang du système associé à A.

2.4 Puissances de matrices carrées

Théorème 26.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Le produit de deux matrices carrées de taille n est une matrice carrée de taille n.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^0 = I_n$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AI_n = I_nA = A$.

Théorème 27.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Alors, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}$$

Définition 28.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
On dit que <u>A et B commutent</u> lorsque $AB = BA$.

Théorème 29.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$.
Alors, pour tout entier positif k, les matrices A et B^k commutent.

Théorème 30 (Binôme de Newton)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$.

1. $\forall k \in \mathbb{N},\ (AB)^k = A^kB^k$.
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ (A+B)^k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} A^\ell B^{k-\ell}$.

<u>**Exemple 31.**</u> Calculer les différentes puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5 Transposition d'une matrice

Définition 32.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ non nuls.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle transposée de la matrice A la matrice notée A^T (ou ${}^tA$) et définie par

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{j1} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{1i} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{ni} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{1p} & \dots & a_{jp} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Les lignes de A deviennent les colonnes de A^T et les colonnes de A deviennent les lignes de A^T.

Exemple 33. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Théorème 34.

Soit $(n,p,q) \in \mathbb{N}^2$ non nuls.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ (A^T)^T = A$.
2. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ (AB)^T = B^T A^T$.

Définition 35.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est une matrice symétrique lorsque $A^T = A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques

Exemple 36.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.
2. La somme de deux matrices symétriques est une matrice symétrique.
3. Le produit de deux matrices symétriques qui commutent est une matrice symétrique.

3 Matrices carrées inversibles

3.1 Définitions

Définition 37.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est <u>inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$</u> lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

B est <u>l'inverse de A</u>. On la note A^{-1}.

Exemple 38.

1. La matrice identité I_n est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $I_n^{-1} = I_n$.
2. La matrice nulle 0_n n'est pas inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2 Inversibilité d'une matrice carrée de taille 2

Théorème 39.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
La matrice A est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.
Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple 40. Pour θ un réel, la matrice $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est-elle inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Si oui, quel est son inverse ?

3.3 Résolution de systèmes

Théorème 41.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Si la matrice A est inversible alors le système $AX = B$ admet une unique solution $X = A^{-1}B$.
Le système est donc de Cramer.

Exemple 42. Résoudre, en utilisant les matrices, le système $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{array} \right.$.

3.4 Recherche de l'inverse d'une matrice carrée par la méthode du pivot

Théorème 43.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si, pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ admet une unique solution alors la matrice A est inversible et on peut déterminer A^{-1} en résolvant le système.

Exemple 44. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Pour étudier l'inversibilité de A, on va résoudre le système $AX = B$ pour un second membre B quelconque.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & & +2z & = & b_1 \\ 2x & +y & +z & = & b_2 \\ & y & +2z & = & b_3 \end{cases} \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & & +2z & = & b_1 \\ & +y & -3z & = & -2b_1 + b_2 \\ & y & +2z & = & b_3 \end{cases} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & & +2z & = & b_1 \\ & +y & -3z & = & -2b_1 + b_2 \\ & & 5z & = & 2b_1 - b_2 + b_3 \end{cases} \\
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{5}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & & +2z & = & b_1 \\ & +y & -3z & = & -2b_1 + b_2 \\ & & z & = & \dfrac{2b_1 - b_2 + b_3}{5} \end{cases} \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & & +2z & = & b_1 \\ & +y & & = & \dfrac{-4b_1 + 2b_2 + 3b_3}{5} \\ & & z & = & \dfrac{2b_1 - b_2 + b_3}{5} \end{cases} \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & & & = & \dfrac{b_1 + 2b_2 - 2b_3}{5} \\ & y & & = & \dfrac{-4b_1 + 2b_2 + 3b_3}{5} \\ & & z & = & \dfrac{2b_1 - b_2 + b_3}{5} \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le système admet une unique solution. Donc la matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 45. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.5 Propriétés

Théorème 46.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ inversibles.

1. A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
3. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Remarque 47. On ne peut rien dire dans le cas général sur la somme de deux matrices inversibles.