<u>Exercice 1</u> On définit les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Parmi les matrices, lesquelles peut-on multiplier ? Donner la taille des produits puis les calculer.
2. Donner leur transposée.

<u>Exercice 2</u> Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $A(x)A(y)$.
2. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Déterminer $(A(x))^n$.

<u>Exercice 3</u> Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 4</u> Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 5</u> Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A(A^2 - 3I_3) = -3I_3$.
2. En déduire que A est inversible et la valeur de son inverse.

<u>Exercice 6</u> Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 11 & -2 \end{pmatrix}$.

1. On veut résoudre l'équation $AX = B$ d'inconnues X. Quelle est la taille de la matrice X ? Déterminer les solutions X.
2. On veut résoudre l'équation $YA = B$ d'inconnues Y. Quelle est la taille de la matrice Y ? Déterminer les solutions Y.

<u>Exercice 7</u> On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse que l'on notera P^{-1}.
2. Déterminer une matrice A telle que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
4. Déterminer la matrice D (qui est une matrice diagonale) définie par : $D = P^{-1}AP$.
5. Montrer que $A = PDP^{-1}$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice D^n. **On ne demande aucune démonstration**.
7. En déduire la matrice A^n (sous forme d'un tableau).
8. En déduire X_n, puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 8</u> [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A - 3I_n = 0$.
   Déterminer A^3 et A^4.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Montrer que $(I_4 - A)(I_4 + A + A^2 + A^3) = I_4 - A^4$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.
   (a) Quelle est la taille des matrices A^T, A^TA et AA^T ?
   (b) Quels sont les coefficients sur la diagonale de AA^T ?
   (c) Montrer que les matrices A^TA et AA^T sont symétriques.