Programme de colles n° 12
du 15 au 19 décembre 2025

Chapitre 11 – Equations différentielles linéaires

1. Recherche de primitives usuelles
2. Equations différentielles linéaire du premier ordre : résolution par variation de la constante.
3. Equations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants : La forme de la solution particulière est donnée, sauf quand le second membre est constant.
4. Prise en compte de conditions initiales.

Chapitre 12 – Systèmes linéaires

1. Résolution par substitution
2. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système
3. Méthode du pivot de Gauss pour échelonner un système et le résoudre.
4. Ensemble des solutions d'un système linéaire
5. Systèmes à paramètres

Chapitre 13 – Matrices

Pour les questions de cours seulement.

Questions de cours.

1. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ est inclus dans
   $F = \{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-at},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   (Chap 11, thm 9).
2. Résolution de l'équation $y'' + \alpha^2 y = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (Chap 11, ex 29).
3. Pour une équation de la forme $y'' + ay' + by = 0$, donner les trois formes possibles pour l'ensemble des solutions.
   (Chap 11, thm 27).
4. Puissance d'une matrice diagonale.
   (Chap 13, thm 27).
5. Enoncé du binôme de Newton et application au calcul des puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (Chap 13, thm 30.2 et ex 31).
6. Critère d'inversibilité pour une matrice de taille 2×2 : énoncé et démonstration du sens indirect.
   (Chap 13, théorème 39).

Tournez s'il vous plait.

c) Calculs de primitives	
Primitives usuelles et calculs simples de primitives.	Primitives de $u'e^u$, $u'u^n$, u'/u, $u'/\sqrt{u}$, $u'\sin u$, $u'\cos u$.

Analyse 4 – Équations différentielles linéaires simples

L'objectif de ce chapitre est de rappeler et d'approfondir la problématique des équations différentielles, en vue des usages qui en sont faits en physique, chimie, biologie.

Contenus	Commentaires
a) Équations du premier ordre	
Résolution de $y' + a(t)y = f(t)$ où a et f sont des fonctions continues sur un intervalle : • résolution de l'équation homogène associée, cas particulier où a est constante, • principe de superposition, • méthode de variation de la constante, • cas particulier où a et f sont constantes.	Pour toute autre équation différentielle du premier ordre, une méthode de résolution doit être fournie. $\rightleftharpoons$ On peut montrer des exemples tirés de la physique-chimie : cinétique d'une réaction, charge d'un condensateur, système physique en contact avec un thermostat, …
b) Équations du second ordre	
Résolution de $ay'' + by' + cy = f(t)$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle : • résolution de l'équation homogène associée, • principe de superposition, • détermination d'une solution particulière.	La résolution de l'équation homogène se fera à l'aide de l'équation caractéristique. On pourra à cette occasion introduire la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$: $t \mapsto e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbf{C}$. $\rightleftharpoons$ On peut traiter en exemple l'équation de l'oscillateur harmonique $y'' + \omega^2 y = 0$ dont les solutions sont présentées sous diverses formes ; et par extension aux sciences physiques dériver et chercher une primitive à $t \mapsto e^{i\omega t}$. La forme d'une solution particulière est donnée sauf lorsque f est une fonction constante. Par exemple, lorsque f est de la forme $t \mapsto \sin(\omega t)$ ou $t \mapsto \cos(\omega t)$, l'énoncé devra indiquer de chercher une solution du type $t \mapsto \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto \lambda t \sin(\omega t) + \mu t \cos(\omega t)$, λ et μ étant à déterminer.

Tournez s'il vous plait.

Algèbre linéaire 1 – Systèmes linéaires

⇌ Le premier contact avec l'algèbre linéaire est de nature algorithmique. Il est envisageable de programmer l'algorithme du pivot en restant sur des approches simples. .

On travaille sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ le plus souvent en pratique, occasionnellement sur $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Contenus	Commentaires
a) Généralités sur les systèmes linéaires	
Équation linéaire à p inconnues. Système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$.	

Contenus (suite)	Commentaires
Système linéaire homogène.	
Système compatible, système incompatible, système de Cramer.	Tout système linéaire homogène est compatible.
Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire : • échange des lignes L_i et L_j, • ajout de λL_j à L_i, • multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$.	On emploiera les notations suivantes : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
Deux systèmes sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	
Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.	
b) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss	
Système échelonné : un système est échelonné s'il vérifie les deux propriétés suivantes : • si une ligne a un membre de gauche nul, toutes les lignes suivantes ont aussi un membre de gauche nul, • dans les lignes dont le membre de gauche est non nul, l'indice de l'inconnue portant le premier coefficient non nul à partir de la gauche croît strictement.	
On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne dont le membre de gauche est non nul.	
Détermination, pour un système linéaire, d'un système échelonné équivalent par la méthode du pivot de Gauss.	On se limite à la mise en pratique de la méthode; l'écriture formelle d'un algorithme de réduction n'est pas un attendu du programme.
c) Ensemble des solutions d'un système linéaire	
Rang d'un système échelonné : c'est son nombre de pivots.	
Rang d'un système : c'est le rang de tout système échelonné équivalent.	On admet que deux systèmes échelonnés équivalents ont même rang.
Inconnues principales, inconnues secondaires (variables libres).	
Résolution d'un système échelonné.	
Résolution d'un système : un système linéaire a zéro, une seule ou une infinité de solutions. Dans ce dernier cas, on exprime toutes les inconnues en fonction des inconnues secondaires.	On fait le lien avec les problèmes d'intersection de droites et de plans (dans le plan ou dans l'espace).