

Programme de colles n° 13

du 5 au 9 janvier 2026

Chapitre 12 – Systèmes linéaires

Tout le chapitre.

Chapitre 13 – Matrices

1. Définition, Addition, multiplication par un scalaire
2. Matrices particulières : diagonales, triangulaires, symétriques.
3. Produit de matrices
4. Puissances de matrices carrées : en conjecturant une formule ou par le binôme Newton.
5. Transposition d'une matrice .
6. Lien avec les systèmes.
7. Matrices carrées inversibles : Critère d'inversibilité et formule de l'inverse pour les matrices de taille 2×2 , étude de l'inversibilité par la résolution d'un système pour les matrices de taille supérieure à 3.
8. Rang d'une matrice : définition, recherche en pratique et utilisation pour étudier l'inversibilité.

Questions de cours.

1. Puissances d'une matrice diagonale.
(Chap 13, thm 27).
2. Énoncé du binôme de Newton et application au calcul des puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(Chap 13, thm 30.2 et ex 31).
3. Critère d'inversibilité pour une matrice de taille 2×2 : énoncé et démonstration du sens indirect.
(Chap 13, théorème 39).
4. Soient A et B deux matrices qui commutent.
Alors A commute avec les puissances de B .
(Chap 13, théorème 29).
5. Définition d'une matrice inversible et démonstration du résultat sur l'inverse d'un produit.
(Chap13, def 37 et thm 46.3).
6. Définition de la transposée d'une matrice et démonstration du résultat sur la transposée d'une somme de deux matrices.
(Chap13, def 32 et thm 34.2).

Algèbre linéaire 1 – Systèmes linéaires

⇒ Le premier contact avec l'algèbre linéaire est de nature algorithmique. Il est envisageable de programmer l'algorithme du pivot en restant sur des approches simples. .

On travaille sur $K = \mathbb{R}$ le plus souvent en pratique, occasionnellement sur $K = \mathbb{C}$.

Contenus	Commentaires
a) Généralités sur les systèmes linéaires Équation linéaire à p inconnues. Système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$.	
Contenus (suite) Système linéaire homogène. Système compatible, système incompatible, système de Cramer. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire : - échange des lignes L_i et L_j, - ajout de λL_j à L_i, - multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$. Deux systèmes sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.	Tout système linéaire homogène est compatible. On emploiera les notations suivantes : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
b) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss Système échelonné : un système est échelonné s'il vérifie les deux propriétés suivantes : - si une ligne a un membre de gauche nul, toutes les lignes suivantes ont aussi un membre de gauche nul, - dans les lignes dont le membre de gauche est non nul, l'indice de l'inconnue portant le premier coefficient non nul à partir de la gauche croît strictement. On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne dont le membre de gauche est non nul. Détermination, pour un système linéaire, d'un système échelonné équivalent par la méthode du pivot de Gauss.	On se limite à la mise en pratique de la méthode; l'écriture formelle d'un algorithme de réduction n'est pas un attendu du programme.
c) Ensemble des solutions d'un système linéaire Rang d'un système échelonné : c'est son nombre de pivots. Rang d'un système : c'est le rang de tout système échelonné équivalent. Inconnues principales, inconnues secondaires (variables libres). Résolution d'un système échelonné. Résolution d'un système : un système linéaire a zéro, une seule ou une infinité de solutions. Dans ce dernier cas, on exprime toutes les inconnues en fonction des inconnues secondaires.	On admet que deux systèmes échelonnés équivalents ont même rang. On fait le lien avec les problèmes d'intersection de droites et de plans (dans le plan ou dans l'espace).

Tournez s'il vous plait.

Algèbre linéaire 2 – Matrices

Le but de ce chapitre est de mettre en place le calcul sur les matrices avec ses analogies et différences vis-à-vis du calcul sur les nombres réels et complexes. La mise en pratique de ce calcul peut nécessiter l'usage de l'ordinateur.

On travaille sur $K = \mathbb{R}$ le plus souvent en pratique, occasionnellement sur $K = \mathbb{C}$.

On ne confondra pas matrices (ou vecteurs) lignes et matrices (ou vecteurs) colonnes.

Contenus	Commentaires
Matrices : définition, vocabulaire. Matrice nulle. Matrices carrées, matrices lignes, colonnes. Matrices triangulaires, diagonales. Matrice identité. Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit matriciel. Formule du binôme quand les deux matrices commutent. Propriétés de ces opérations.	Produit de matrices diagonales.

Contenus (suite)	Commentaires
Transposée d'une matrice M , notée M^T . Transposée d'une somme, d'un produit de matrices. Matrices carrées symétriques. Écriture matricielle d'un système linéaire. Rang d'une matrice.	On adapte la méthode du pivot qui devient un algorithme opérant sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Le rang d'une matrice est alors défini comme le nombre de pivots. On admet que le rang d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes. On pourra proposer, dès que le cours sur les espaces vectoriels aura été traité, des caractérisations du rang d'une matrice permettant d'éviter le recours systématique à la méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang dans la pratique.
Matrices carrées inversibles, matrice inverse, inverse d'un produit, inverse de la transposée d'une matrice carrée inversible. Recherche pratique de l'inverse d'une matrice.	L'inversion peut se ramener à la résolution de systèmes linéaires. La description d'un algorithme d'inversion de matrices n'est pas un attendu du programme.
Déterminant des matrices 2×2 et caractérisation des matrices 2×2 inversibles.	Seul le déterminant des matrices 2×2 est introduit et les formules de Cramer, même dans le cas 2×2 , ne sont pas exigibles.
Expression matricielle formelle, $X = A^{-1}Y$, de la solution d'un système linéaire $AX = Y$ lorsque la matrice carrée A qui lui est associée est inversible.	