BCPST 1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n° 4

— 13 décembre 2025—

Exercice 1 : Calculs

1.

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y+2z=1 \\ 2x+y+z=0 \\ x+4y-z=-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x-3y+2z=1 & \\ \quad 7y-3z=-2 & L2 \leftarrow L2-2L1 \\ \quad 7y-3z=-2 & L3 \leftarrow L3-L1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x-3y+2z=1 & \\ \quad 7y-3z=-2 & \\ \qquad 0=0 & L3 \leftarrow L3-L2 \end{array}\right.$$

Système de rang 2, compatible

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{7}-\dfrac{5}{7}z \\ y=-\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{7}z \end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } S=\left\{\left(\frac{1}{7}-\frac{5}{7}z,-\frac{2}{7}+\frac{3}{7}z,y,z\right),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}}$.

2. $(E) : y'-\dfrac{1}{t}y=t^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
   • Résolution de l'équation homogène $(E_H) : y'-\dfrac{1}{t}y=0$.
   La fonction $t\mapsto -\dfrac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y admet des primitives. $t\mapsto -\ln(t)$ en est une. Donc l'ensemble des solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$S_H=\left\{t\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \lambda.\mathbf{e}^{-(-\ln(t))}\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \lambda t\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

   • Recherche d'une solution particulière.
   Par la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t)=\lambda(t).t$.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ y_p'(t)-\frac{1}{t}y_p(t)=t^3 \\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}_+^*, \lambda'(t).t+\lambda(t)-\frac{\lambda(t)t}{t}=t^3 \\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}_+^*, \lambda'(t)=t^2 \end{aligned}$$

   On peut donc prendre $\lambda : t\mapsto \dfrac{1}{3}t^4$ et on obtient que $t\mapsto -\dfrac{1}{3}t^4$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   • On en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\left\{t\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \frac{1}{3}t^4+\lambda.t,\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

3. On pose $(E) : y''+4y'+3y=\mathbf{e}^{2t}$.
   (E) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
   • On commence par résoudre l'équation homogène $(E_H) : y''+4y'+3y=0$. Elle a pour équation caractéristique $x^2+4x+3=0$, de racines réelles -3 et -1. Donc l'ensemble des solutions de (E_H) est

$$S_H=\left\{t\in\mathbb{R}\mapsto A\mathbf{e}^{-3t}+B\mathbf{e}^{-t},\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

   • Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $y_p(t)=a\mathbf{e}^{2t}$.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ 4a\mathbf{e}^{2t}+8a\mathbf{e}^{2t}+3a\mathbf{e}^{2t}=\mathbf{e}^{2t} \\ &\iff 15a=1 \end{aligned}$$

Donc, $y_p : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{15}\mathbf{e}^{2t}$ est une solution particulière de (E). • On en déduit l'ensemble des solutions de (E) :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{15}\mathbf{e}^{2t} + A\mathbf{e}^{-3t} + B\mathbf{e}^{-t},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

• Prise en compte des conditions initiales :

Soit f l'unique solution du système. Il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{15}\mathbf{e}^{2t} + A\mathbf{e}^{3t} + B\mathbf{e}^{-t}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \dfrac{2}{15} - 3A\mathbf{e}^{-3t} - B\mathbf{e}^{-t}$.

Donc $f(0) = \dfrac{1}{15} + A + B$ et $f'(0) = \dfrac{2}{15} - 3A - B$. Or, $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$. Donc, $\begin{cases} \dfrac{1}{15} + A + B = 1 \\ \dfrac{2}{15} - 3A - B = 0 \end{cases}$.

Donc, $\begin{cases} \dfrac{3}{15} - 2A = 1 (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ \dfrac{2}{15} - 3A - B = 0 \end{cases}$.

Donc, $\begin{cases} A = \dfrac{-6}{15} \\ B = \dfrac{20}{15} \end{cases}$.

On en déduit que $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{15}\mathbf{e}^{2t} - \dfrac{6}{15}\mathbf{e}^{-3t} + \dfrac{20}{15}\mathbf{e}^{-t}$.

4.
```python
def appartient(x,mot):
    for i in range(len(mot)):
      if mot[i]==x:
        return True
    return False
```

Exercice 2

1. **Informatique**

   (a) La fonction suivante prend en entrée un entier naturel n et renvoie le terme u_n de la suite.

```python
def suite(n):
    u = 2
    for i in range(1,n+1):
        u = (2*u + 1) / (u + 2)
    return u
```

   (b) La fonction suivante prend en entrée un nombre réel $e > 0$ et renvoie l'indice n du premier terme u_n tel que $|u_n - 1| \leqslant e$.

```python
def seuil(e):
    u = 2
    n = 0
    while abs(u-1)>e:
        u = (2*u + 1) / (u + 2)
        n = n + 1
    return n
```

2. **Étude de f**

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $x \in \mathcal{D}_f \iff x + 2 \neq 0 \iff x \neq -2$.
   $\boxed{\text{Donc } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$.

   (b) f est une fraction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, $\mathcal{D}_f$.
   $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2}}$.

   (c) D'après le calcul de f' précédent, on constate que $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) > 0$.
   Donc $\forall x \in]-2, +\infty[,\ f'(x) > 0$. La fonction est donc strictement croissante sur cet intervalle.
   Calculons les limites aux bornes de cet intervalle :

En $+\infty$:

Soit $x > -2$. $f(x) = \dfrac{2x(1+\frac{1}{2x})}{x(1+\frac{2}{x})} = 2\dfrac{1+\frac{1}{2x}}{1+\frac{2}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc par opérations usuelles sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2x}}{1+\frac{2}{x}} = 1$. On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

En -2^+ :

$\lim\limits_{x\to-2}(2x+1) = -3$

$\lim\limits_{x\to-2^+}(x+2) = 0^+$

Donc par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$.

On en déduit le tableau de variation de f sur $]-2,+\infty[$:

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2

(d) Soit $x \in]1,+\infty[$ fixé quelconque.
$x > 1$ et la fonction f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Donc $f(x) > f(1)$.
Or $f(1) = 1$. On en déduit que $\boxed{\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) > 1}$.

3. (a) Remarque : comme la fonction f a un ensemble de définition qui n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier, on doit justifier que la suite (u_n) est bien définie. En effet, si jamais l'un des u_n valait -2, alors il serait impossible de calculer les termes suivant et la suite ne serait pas définie. On doit donc montrer que tous les termes de la suite appartiennent à l'ensemble de définition de f. On procède par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence $\mathcal{P}_n$: « le terme u_n existe et $u_n > 1$ ».
(I) $u_0 = 2 > 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
Donc u_n existe et $u_n > 1$. Donc $u_n \in \mathcal{D}_f$. Ainsi, $f(u_n)$ existe, et d'après la question précédente, $f(u_n) > 1$.
Ainsi, u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 1$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
(C) Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est bien définie et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1}$.

(b) On fait une récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n)$: "$u_{n+1} \leq u_n$".

- (I) $u_0 = 2$ et $u_1 = \dfrac{5}{4} > 2$ donc a propriété est vraie au rang 0.
- (H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie. Donc, $u_{n+1} \leq u_n$. Donc, $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ car la fonction f est croissante sur $]1,+\infty[$. Donc, $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- (C) Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } u \text{ est décroissante}}$.

(c) La suite u est décroissante et minorée. Par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge}}$. Notons ℓ sa limite.

(d) $\begin{cases} \text{La fonction } f \text{ est continue sur }]1,+\infty[. \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \\ \text{La suite } u \text{ converge evrs } \ell. \end{cases}$ Par le théorème du point fixe, $\ell = f(\ell)$.

Donc, $\ell = \dfrac{2\ell+1}{\ell+2}$. Donc, $\ell^2 = 1$. Donc $\ell = 1$ ou $\ell = -1$.
Or, par passage à la limite dans l'inégalité de la question 1, on en déduit que $\ell \geq 1$.
Donc, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

4. **Expression de u_n en fonction de n**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n > 1$ donc $u_n \neq 1$. Donc, a_n existe.
$\boxed{\text{Donc la suite } (a_n) \text{ est bien définie.}}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 3a_n &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} - 3\frac{u_n}{u_n-1} \\ &= \frac{\frac{2u_n+1}{u_n+2}}{\frac{2u_n+1}{u_n+2}-1} - 3\frac{u_n}{u_n-1} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 3a_n &= \frac{2u_n+1}{2u_n+1-(u_n+2)} - 3\frac{u_n}{u_n-1} \\ &= \frac{2u_n+1}{u_n-1} - 3\frac{u_n}{u_n-1} \\ &= \frac{-u_n+1}{u_n-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 3a_n - 1}$.

(c) La suite (a_n) est donc arithmético-géométrique.
On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = 3\ell - 1$. On trouve $\ell = \dfrac{1}{2}$.
On pose, $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = a_n - \frac{1}{2}$. On montre que la suite (b_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $b_0 = a_0 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ car $a_0 = \dfrac{u_0}{u_0-1}$ et $u_0 = 2$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{3^{n+1}}{2}$. On en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3^{n+1}}{2}}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{u_n}{u_n-1} \\ \text{Donc, } a_n(u_n-1) &= u_n \\ \text{Donc, } a_nu_n - u_n &= a_n \\ \text{Donc, } u_n(a_n-1) &= a_n \end{aligned}$$

Or, $a_n \neq 1$ d'après les questions précédentes donc on peut diviser par $a_n - 1$.
Donc, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n-1}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3^{n+1}}{2}}{\frac{3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2}}$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}-1}}$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \dfrac{1+\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3^{n+1}}}$.Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{n+1} = +\infty$ (suite géométrique de raison $3 > 1$) donc, par opérations sur les limites, on retrouve que $\boxed{\text{la suite } u \text{ converge vers } 1}$.

Exercice 3

1. **Par changement de fonction.**

(a) Par produit, u est deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$.
$\forall x \in]0,+\infty[,\ u'(x) = 3x^2f(x) + x^3f'(x)$ et $u''(x) = 6xf(x) + 3x^2f'(x) + 3x^2f'(x) + x^3f''(x) = 6xf(x) + 6x^2f'(x) + x^3f''(x)$.

(b) On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in]0,+\infty[,\ x^2f''(x) + 5xf'(x) + 3f(x) = x^2 \\ &\iff \forall x \in]0,+\infty[,\ x^4f''(x) + 5x^3f'(x) + 3x^2f(x) = x^4 \\ &\iff \forall x \in]0,+\infty[,\ x^4f''(x) + 6x^3f'(x) + 6x^2f(x) - x^3f'(x) - 3x^2f(x) = x^4 \\ &\iff \forall x \in]0,+\infty[,\ x[x^3f''(x) + 6x^2f'(x) + 6xf(x)] - x^3f'(x) - 3x^2f(x) = x^4 \\ &\iff \forall x \in]0,+\infty[,\ xu''(x) - u(x) = x^4 \end{aligned}$$

En posant $(E_1) : xy''(x) - y'(x) = x^4$, on a bien l'équivalence souhaitée.

(c) On en déduit que $\boxed{u \text{ est solution de } (E_1) \Longleftrightarrow u' \text{ est solution de } (G) : xy' - y = x^4}$.

(d) On reconnait la même équation que dans la question 2 de l'exercice 1 donc $\boxed{S_G = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{3}x^4 + \lambda.x,\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$.

(e) Par les équivalences des questions 1(b) puis 1(a), on en déduit que

$\boxed{S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{15}x^5 + \frac{\lambda}{2}.x^2 + \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

En utilisant la relation entre u et f, on obtient $\boxed{S = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{15}x^2 + \frac{\lambda}{2x} + \frac{\mu}{x^3},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$

2. **Par changement de variable.**

(a) z est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
$\forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) = \mathbf{e}^t f'(\mathbf{e}^t)$ et $z''(t) = \mathbf{e}^t f'(\mathbf{e}^t) + \mathbf{e}^{2t} f''(\mathbf{e}^t)$.

(b) On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E) &\Longleftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[,\ x^2 f''(x) + 5xf'(x) + 3f(x) = x^2 \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[,\ x^2 f''(x) + xf'(x) + 4xf'(x) + 3f(x) = x^4 \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[,\ x^2 f''(x) + xf'(x) + 4[xf'(x) + f(x)] - xf(x) = x^4 \\
&\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) + 4z'(t) - z(t) = (\mathbf{e}^t)^2 \\
&\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) + 4z'(t) - z(t) = \mathbf{e}^{2t}
\end{aligned}$$

En notant $(E_2) : y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = \mathbf{e}^{2t}$, on a bien l'équivalence souhaitée.

(c) On reconnait l'équation de la question 3 de l'exercice 1 donc $\boxed{S_2 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{15}\mathbf{e}^{2t} + A\mathbf{e}^{-3t} + B\mathbf{e}^{-t},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

(d) Pour $x \in]0, +\infty[,\ f(x) = z(\ln(x))$ donc $\boxed{S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{15}x^2 + \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.