



1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°4

Samedi 13 décembre 2025

– Suites récurrentes, EDL, Systèmes. –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions, devront être soulignées ou encadrés.

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 - Calculs.

1. Résoudre le système suivant. On indiquera les opérations effectuées et on donnera son rang.

$$(S) : \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 4y - z = -1 \end{cases}$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation suivante (E) : $y' - \frac{1}{t}y = t^3$

On pourra chercher une solution particulière par la méthode de la variation de la constante.

3. Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Indication : On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = ae^{2t}$ avec a un réel à déterminer.

4. **Informatique.**

Ecrire une fonction `appartient` qui prend en entrée `x` une chaîne de caractères de longueur 1 et `mot`, une chaîne de caractères et qui renvoie `True` si le caractère `x` appartient à la chaîne de caractères `mot` et `False` sinon.

Exercice 2 - Une suite récurrente.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$ et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$.

1. **Informatique.**

- (a) Écrire une fonction python `suite` qui prend en entrée un entier naturel `n` et qui renvoie le terme u_n de cette suite.
- (b) On admet que cette suite tend vers 1. Écrire une fonction python `seuil` qui prend en entrée un nombre réel strictement positif ϵ et qui renvoie l'indice n du premier terme u_n de la suite tel que $|u_n - 1| < \epsilon$.

2. **Étude de f**

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de f . On note $\mathcal{D}_f$ cet ensemble.
- (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.
- (c) Étudier le signe de f' sur $] -2, +\infty[$ et établir le tableau de variation de f sur cet intervalle. On détaillera le calcul des limites aux bornes de l'intervalle.
- (d) Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[, f(x) > 1$.

3. **Limite de la suite u**

- (a) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est bien définie, et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
- (b) Montrer que la suite u est monotone.
- (c) En déduire que la suite u converge. On notera ℓ sa limite.
- (d) Déterminer la valeur de ℓ .

4. **Expression de u_n en fonction de n .**

On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$.

- (a) Justifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - 3a_n = 1$.
- (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n . **On admet pour la suite du sujet que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 1$.**
- (d) En déduire enfin une expression de u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (e) Retrouver la valeur de ℓ , la limite de u .

Exercice 3 – Une équation différentielle.

On souhaite résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante.

$$(E) : x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x) = x^2$$

1. Par changement de fonction.

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. On pose $u : x \in]0, +\infty[\mapsto x^3 f(x)$.

- (a) Justifier que u est deux fois dérivable puis calculer u' et u'' .
- (b) Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, u est solution de $(E_1) : xy''(x) - y'(x) = x^4$.
- (c) En déduire une équation différentielle linéaire (G) telle que

$$u \text{ est solution de } (E_1) \iff u' \text{ est solution de } (G).$$

- (d) En relisant bien l'exercice 1, donner, **sans calcul**, les solutions de (G).
- (e) En déduire les solutions de (E_1) puis les solutions de (E).

2. Par changement de variable.

Pour $x \in]0, +\infty[$, on va poser $t = \ln(x)$ ou encore $x = e^t$.

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. On pose $z : t \in \mathbb{R} \mapsto f(e^t)$.

- (a) Justifier que z est deux fois dérivable puis calculer z' et z'' .
- (b) Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de $(E_2) : y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e^{2t}$.
- (c) En relisant bien l'exercice 1, donner, **sans calcul**, les solutions de (E_2) .
- (d) En déduire les solutions de (E).