Chapitre 14 : Géométrie dans $\mathbb{R}^2$

Table des matières

1 Plan $\mathbb{R}^2$.

1.1 Vecteurs et opérations sur les vecteurs

Définition 1.

On définit le plan euclidien par

$$\mathbb{R}^2 = \{\overrightarrow{u} = (x, y) \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}\}$$

Tous les éléments de $\mathbb{R}^2$ ont appelés des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. x et y sont les composantes du vecteur.

Définition 2 (Opérations sur $\mathbb{R}^2$)**.**

Soient $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On définit le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ comme l'unique vecteur de composantes $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
2. On définit le vecteur $\lambda.\overrightarrow{u}$ comme l'unique vecteur de composantes $(\lambda.x_1, \lambda.y_1)$.

Théorème 3 (Règles de calculs)**.**

La loi $+$ sur $\mathbb{R}^2$ a les propriétés suivantes.

- **Commutativité** : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- **Associativité** : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in (\mathbb{R}^2)^3$, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
- **Elément neutre** : $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.
- **Symétrique** : $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, $\exists \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Théorème 4 (Règles de calculs)**.**

La loi $+$ et la loi . sur $\mathbb{R}^2$ ont les propriétés suivantes.

- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left(\lambda = 0 \text{ ou } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\right)$.
- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$ et $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.
- $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.

1.2 Vecteurs colinéaires

Définition 5.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsque

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{u} = t.\overrightarrow{v}.$$

Exemple 6. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ et $\overrightarrow{v} = (-2, -4)$ sont colinéaires.

Exemple 7. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ et $\overrightarrow{v} = (3, 4)$ ne sont pas colinéaires.

Théorème 8.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
2. Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient tous les deux non nuls.
   Ils sont colinéaires si, et seulement si, $\exists\,(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\lambda_1.\overrightarrow{u} + \lambda_2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Remarque 9. Les scalaires λ_1 et λ_2 ne sont pas nuls en même temps.

Théorème 10.

Soient $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires} \quad &\iff \quad xy' - x'y = 0 \\ &\iff \quad \det\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

1.3 Points du plan affine et vecteurs.

Définition 11.

Pour représenter les points du plan $\mathcal{P}$, on utilise le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où

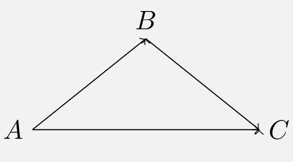
- O est l'origine du repère,
- $\overrightarrow{i}$ est le vecteur $(1, 0)$
- $\overrightarrow{j}$ est le vecteur $(0, 1)$

A tout point M du plan, on associe le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.
Les coordonnées de M sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{u}$.
Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan $\mathcal{P}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Théorème 12 (Relation de Chasles)**.**

Soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$.

1. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A = B$.
3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
4. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.



Définition 13.

Trois points A, B, C du plan sont dits alignés lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
Un triangle est un triplet de points (A, B, C) non alignés, on le note ABC.

1.4 Droites du plan

Définition 14.

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
On appelle droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires.

$$\mathcal{D} = \left\{ M \in \mathcal{P} \text{ tel que } \left(\exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{u} \right) \right\}$$

On note (AB) la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Théorème 15.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathcal{P}$ et soit $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \,,\, \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{array} \right.$$

C'est une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple 16. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1,-3)$ et $B(2,1)$.

Théorème 17.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathcal{P}$ et soit $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \beta x - \alpha y + \alpha y_A - \beta x_A = 0 \end{aligned}$$

1.5 Bases de $\mathbb{R}^2$

Définition 18.

On appelle base de $\mathbb{R}^2$ une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires.

La famille $((1,0),(0,1))$ est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 19. Soient $\overrightarrow{u} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ et $\overrightarrow{v} = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 20 (Coordonnées dans une base)**.**

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base de $\mathbb{R}^2$.

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2,\ \exists\,!(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_1} + a\overrightarrow{e_2}$$

On dit que (a,b) sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Exemple 21.

1. Montrer que $(\overrightarrow{e_1} = (1,0), \overrightarrow{e_2} = (1,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u} = (2,-5)$ dans cette base.

Définition 22.

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$. Soit (a,b) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

- Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$. Soit (a,b) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.
  On appelle matrice de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne, notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u})$, définie par $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$. Soit (a',b') les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.
  On appelle déterminant de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans la base $\mathcal{B}$ le réel noté $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ défini par

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = ab' - a'b.$$

Remarque 23. Si on reformule le théorème 10,

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires si, et seulement si } \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0.$$

2 Orthogonalité.

2.1 Produit scalaire et vecteurs orthogonaux

Définition 24.

Soient $\overrightarrow{u} = (x,y)$ et $\overrightarrow{v} = (x',y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel noté $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$ défini par

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= xx' + yy'.$$

Définition 25.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux lorsque $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0$.

Exemple 26.

1. $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$ sont-ils orthogonaux ?
2. $(-1,2)$ et $(2,1)$ sont-ils orthogonaux ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de α réel les vecteurs $(1,-1)$ et $(2,\alpha)$ sont-ils orthogonaux ?

Théorème 27.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Le produit scalaire a les propriétés suivantes.

1. $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{0} >= 0$.
2. **Symétrie** : $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >=< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >$
3. **Positivité** : $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >\geq 0$.
4. **Définition** : $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
5. **Linéarité** :
   - $< \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} >=< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} > + < \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} >$
   - $< \overrightarrow{u}, \lambda.\overrightarrow{v} >= \lambda. < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$.

Théorème 28.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non nuls.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors ils ne sont pas colinéaires.

2.2 Droites du plan, bis.

Définition 29.

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
On appelle vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$ tout vecteur orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$.

Théorème 30.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et soit $\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha.x + \beta.y - \alpha.x_A - \beta.x_B = 0 \end{aligned}$$

On obtient une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple 31. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(-1, 2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1, 3)$.

Exemple 32. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(0, 2)$, et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$.

Exemple 33. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x+2y+1 = 0$. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Exemple 34. Déterminer une équation catésienne de la droite parallèle à $\mathcal{D} : x + 2y + 1 = 0$, passant par $(1, 0)$.

Théorème 35.

L'intersection de deux droites du plan est :
1. Soit une droite. Dans ce cas, on dit que ces deux droites sont confondues.
2. Soit un point. Dans ce cas, on dit que ces deux droites sont sécantes.
3. Soit l'ensemble vide. Dans ce cas, on dit que les deux droites sont parallèles distinctes.

Exemple 36. Déterminer l'intersection des droites $\mathcal{D} : 2x - y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}' : -x + y + 3 = 0$.

Methode 1.

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
1. Les points $\left(0, \dfrac{-c}{b}\right)$ et $\left(\dfrac{-c}{a}, 0\right)$ appartiennent à la droite $\mathcal{D}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$.
3. Le vecteur $\overrightarrow{u} = (-b, a)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

2.3 Norme euclidienne

Définition 37.

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On appelle <u>norme euclidienne de $\overrightarrow{u}$</u> le réel :

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est <u>unitaire</u> lorsque $||\overrightarrow{u}|| = 1$.

Exemple 38. Déterminer les normes des vecteurs suivants : $(3, -4)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $(1, 4)$.

Théorème 39.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
1. $||\overrightarrow{u}|| \geq 0$,
2. $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
3. $||\lambda \overrightarrow{u}|| = |\lambda| \; ||\overrightarrow{u}||$,
4. $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > + ||\overrightarrow{v}||^2$.

2.4 Cercles.

Définition 40.

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$.
On appelle <u>cercle de centre A et de rayon R</u> l'ensemble des points dont la distance à C vaut R.

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \text{ tel que } ||\overrightarrow{AM}|| = R \right\}$$

Théorème 41.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan $\mathcal{P}$. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon R.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad ||\overrightarrow{AM}||^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = R^2 \end{aligned}$$

On obtient une <u>équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$</u>.

Exemple 42. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $A(1,2)$ et de rayon 4.

Exemple 43. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$.

Théorème 44.

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan $\mathcal{P}$.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0 \end{aligned}$$

On retrouve une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

2.5 Norme et produit scalaire.

Théorème 45.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right).$$

Théorème 46 (Théorème de Pythagore)**.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$.

Théorème 47 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, Admis)**.**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. $< \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} > \leq ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.
2. On a égalité si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

2.6 Bases orthonormées

Définition 48.

On dit qu'une base de $\mathbb{R}^2$ est <u>une base orthonormée</u> lorsque les vecteurs de cette base sont orthogonaux et unitaires.

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0, \\ ||\overrightarrow{u}|| = 1, \\ ||\overrightarrow{v}|| = 1 \end{cases}$$

Exemple 49. Soient $\overrightarrow{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

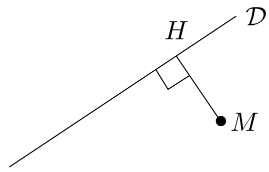
Remarque 50. La base canonique est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

2.7 Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition 51.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
Soit M un point du plan $\mathcal{P}$.
On appelle <u>projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$</u> l'unique point H du plan $\mathcal{P}$ tel que

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u} = 0 \end{cases}$$



Exemple 52. Soit $\mathcal{D} : x + 2y - 1 = 0$ et $M(2, 1)$. Déterminer le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

2.8 Distance d'un point à une droite.

Définition 53.

Soit M un point du plan et $\mathcal{D}$ une droite du plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.
On appelle <u>distance de M à $\mathcal{D}$</u> la distance MH. On la note $\mathrm{d}(M,\mathcal{D})$.

Exemple 54. Soit $A(1, 1)$. Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
Déterminer la distance de A à $\mathcal{D}$.

Théorème 55.

Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\left|\overrightarrow{AH}\right|\right| . \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$