Chapitre 15 : Géométrie dans $\mathbb{R}^3$

Table des matières

1 Espaces $\mathbb{R}^3$

1.1 Vecteurs et opérations sur les vecteurs

Définition 1.

On définit l'espace euclidien par

$$\mathbb{R}^3 = \{\overrightarrow{u} = (x, y, z) \text{ avec } x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Tous les éléments de $\mathbb{R}^3$ ont appelés des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. x, y et z sont les composantes du vecteur.

Définition 2 (Opérations sur $\mathbb{R}^3$)**.**

Soient $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On définit le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ comme l'unique vecteur de composantes $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.
2. On définit le vecteur $\lambda.\overrightarrow{u}$ comme l'unique vecteur de composantes $(\lambda.x_1, \lambda.y_1, \lambda.z_1)$.

Théorème 3 (Règles de calculs)**.**

La loi $+$ sur $\mathbb{R}^3$ a les propriétés suivantes.

- **Commutativité** : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- **Associativité** : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3$, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
- **Elément neutre** : $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.
- **Symétrique** : $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $\exists \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Théorème 4 (Règles de calculs)**.**

La loi $+$ et la loi $.$ sur $\mathbb{R}^2$ ont les propriétés suivantes.

- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left(\lambda = 0 \text{ ou } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\right)$.
- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$ et $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.
- $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.

1.2 Vecteurs colinéaires.

Définition 5.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsque

$$\exists\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0) \text{ tel que } \lambda_1\overrightarrow{u} + \lambda_2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Exemple 6. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{v} = (-2, -4, -6)$ sont colinéaires.

Théorème 7.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
2. Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient tous les deux non nuls.
   Ils sont colinéaires si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = t.\overrightarrow{v}$.

1.3 Vecteurs coplanaires.

Définition 8.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On dit que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont <u>coplanaires</u> lorsque

$$\exists\,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3\ ,\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \neq (0,0,0) \text{ tel que } \lambda_1\overrightarrow{u} + \lambda_2\overrightarrow{v} + \lambda_3\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}.$$

Exemple 9. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,2,0)$, $\overrightarrow{v} = (4,0,6)$ et $\overrightarrow{w} = (0,8,9)$ ne sont pas coplanaires.

Théorème 10.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.
2. Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires.
   $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe $(t,t') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{w} = t.\overrightarrow{v} + t'.\overrightarrow{v}$.

1.4 Points de l'espace affine et vecteurs.

Définition 11.

Pour représenter les points de l'espace $\mathcal{E}$, on utilise le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où

- O est l'origine du repère,
- $\overrightarrow{i}$ est le vecteur $(1,0,0)$
- $\overrightarrow{j}$ est le vecteur $(0,1,0)$
- $\overrightarrow{l}$ est le vecteur $(0,0,1)$

A tout point M de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.
Les coordonnées de M sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace $\mathcal{E}$.
<u>Le vecteur $\overrightarrow{AB}$</u> est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Théorème 12 (Relation de Chasles)**.**

Soient A, B et C trois points de l'espace $\mathcal{E}$.

1. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A = B$.
3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
4. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Définition 13.

Trois points A, B, C du plan sont dits alignés lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
Un triangle est un triplet de points (A, B, C) non alignés, on le note ABC.

1.5 Droites de l'espace

Définition 14.

Soit A un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
On appelle droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ tous les points M de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires.

$$\mathcal{D} = \left\{ M \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left(\exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{u}\right) \right\}$$

Théorème 15.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ , } \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{array} \right.$$

C'est une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

1.6 Plans de l'espace

Définition 16.

Soit A un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$.
On définit le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient coplanaires.

Théorème 17.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $(\overrightarrow{u} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \overrightarrow{v} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2))$ deux vecteurs non colinéaires.
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \text{ , } \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + t\alpha_1 + t'\alpha_2 \\ y = y_A + t\beta_1 + t'\beta_2 \\ z = z_A + t\gamma_1 + t'\gamma_2 \end{array} \right.$$

C'est une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

Exemple 18. Soient $A(1, 0, 2)$, $B(0, -1, 3)$ et $C(1, 2, 3)$. Déterminer un système d'équations paramétriques du plan passant par A, B et C.

1.7 Bases de $\mathbb{R}^3$

Définition 19.

On appelle base de $\mathbb{R}^3$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non coplanaires.
La famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 20. Soient $\overrightarrow{u} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{v} = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\right)$ et $\overrightarrow{w} = (1,0,0)$.
Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 21 (Coordonnées dans une base)**.**

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3,\ \exists\,!(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$$

On dit que (a,b,c) sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

Exemple 22.

1. Montrer que $(\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (1,1,0), , \overrightarrow{e_3} = (1,1,0))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u} = (2,-5,4)$ dans cette base.

Définition 23.

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$.
Soit (a,b,c) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle matrice de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

2 Orthogonalité.

2.1 Produit scalaire

Définition 24.

Soient $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ et $\overrightarrow{v} = (x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel noté $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$ et défini par

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= xx' + yy' + zz'.$$

Définition 25.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux lorsque $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0$.

Théorème 26.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit scalaire a les propriétés suivantes.

1. $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{0}>= 0$.
2. **Symétrie** : $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>=<\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}>$
3. **Positivité** : $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}>\geq 0$.
4. **Définition** : $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}>= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
5. **Linéarité** : $<\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}>=<\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}>+<\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}>$

Théorème 27.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non nuls.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors ils ne sont pas colinéaires.

2.2 Plans de l'espace, bis.

Définition 28.

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.
On appelle vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

Théorème 29.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ un vecteur non nul.
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{AM}.\vec{w} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0 \end{aligned}$$

C'est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Exemple 30. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(-1, 2, 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1, 3, -2)$.

Methode 1.

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.
Pour trouver un vecteur directeur, on résout le système $\left\{ \begin{array}{l} <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}>= 0 \\ <\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n}>= 0 \end{array} \right.$

Methode 2.

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Exemple 31. Soit $\mathcal{P}$ le plan de l'espace passant par $B(1, 2, 0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1, 0, 1)$ et $\vec{v}(-1, 1, 2)$.
Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

2.3 Intersection de plans

Définition 32.

On dit que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux s'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

Exemple 33. Déterminer une équation cartésienne d'un plan orthogonal au plan $\mathcal{P} : 2x - y + z + 1 = 0$ passant par $A(1, 1, 1)$. Un tel plan est-il unique ?

Définition 34.

On dit que deux plans de l'espace sont parallèles s'ils admettent des vecteurs normaux colinéaires. En d'autres termes, deux plans sont parallèles s'ils ont un vecteur normal commun.

2.4 Norme euclidienne

Définition 35.

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On appelle <u>norme euclidienne de $\overrightarrow{u}$</u> le réel :

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}>} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est <u>unitaire</u> lorsque $||\overrightarrow{u}|| = 1$.

Théorème 36.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

1. $||\lambda\overrightarrow{u}|| = |\lambda| \; ||\vec{u}||$,
2. $||\overrightarrow{u}|| \geq 0$,
3. $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Théorème 37.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

1. $||\overrightarrow{u}|| \geq 0$,
2. $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
3. $||\lambda\overrightarrow{u}|| = |\lambda| \; ||\overrightarrow{u}||$,
4. $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > + ||\overrightarrow{v}||^2$.

2.5 Normes et produit scalaire.

Théorème 38 (Théorème de Pythagore)**.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2$.

Théorème 39 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, Admis)**.**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. $|<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>| \leq ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.
2. On a égalité si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

2.6 Bases orthonormées

Définition 40.

Soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3$ une base de $\mathbb{R}^3$.
On parle de base orthonormée lorsque les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et unitaires.

$$\begin{cases} <\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>=0, \\ <\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}>=0, \\ <\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}>=0, \\ ||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{w}|| = 1. \end{cases}$$

Exemple 41. Soient $\overrightarrow{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ et $\overrightarrow{w} = (1,0,0)$. La famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est-elle une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$?

Remarque 42. La base canonique est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

2.7 Droites de l'espace, bis.

Définition 43.

Soit A un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
On appelle droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ tous les points M de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires.

$$\mathcal{D} = \left\{M \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left(\exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{u}\right)\right\}$$

Théorème 44.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{u} = (\alpha,\beta,\gamma)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$M(x,y,z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}\ ,\ \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

C'est une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Théorème 45.

L'intersection de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de l'espace est :

1. Soit un plan ($\mathcal{P} = \mathcal{P}'$). Dans ce cas, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus (en particulier, ils sont parallèles).
2. Soit l'ensemble vide. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles distincts.
3. Soit une droite. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants (leurs vecteurs normaux sont non colinéaires).

Définition 46.

Soit D une droite définie comme l'intersection de deux plans. Le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = & 0 \end{cases}$$

est un système d'équation cartésienne de D.

Exemple 47.

1. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ définis par $\mathcal{P} : x - 2y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : 2x + y - z - 3 = 0$. Préciser, si c'est une droite, un point et un vecteur directeur et en déduire une représentation paramétrique.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de l'espace passant par $A(1, 2, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 1)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$.

2.8 Projection orthogonale d'un point sur une droite.

Définition 48.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
Soit M un point de l'espace $\mathcal{E}$.
On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ l'unique point H de l'espace $\mathcal{E}$ tel que

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u} = 0 \end{cases}$$

Exemple 49. Soit $\mathcal{D} : x + 2y - 1 = 0$ et $M(2, 1, 1)$. Déterminer le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

2.9 Distance d'un point à une droite.

Définition 50.

Soit M un point de l'espace et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.
On appelle distance de M à $\mathcal{D}$ la distance MH. On la note $\mathrm{d}(M,\mathcal{D})$.

Exemple 51. Soit $A(1, 1, 1)$. Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer la distance de A à $\mathcal{P}$.

Théorème 52.

Soit A, B et C trois points de l'espace $\mathcal{E}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\left|\overrightarrow{AH}\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

2.10 Projection orthogonale d'un point sur une droite.

Définition 53.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Soit M un point de l'espace $\mathcal{E}$.
On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ l'unique point H de l'espace $\mathcal{E}$ tel que

$$\begin{cases} H \in \mathcal{P} \\ \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u} = 0 \\ \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{v} = 0 \end{cases}$$

Exemple 54. Soit $A(1,1,1)$. Soit $\mathcal{P}$ le plan d' équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = -3 + t + t' \\ z = 1 + 2t + t' \end{cases}$, $(t,t') \in \mathbb{R}^2$.
Déterminer le projeté orthogonal de A à $\mathcal{P}$.

2.11 Distance d'un point à un plan.

Définition 55.

Soit M un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.
On appelle distance de M à $\mathcal{P}$ la distance MH. On la note $\mathrm{d}(M,\mathcal{P})$.

Exemple 56. Soit $\mathcal{P} : x + 2y - 3z - 1 = 0$ et $M(2,1,1)$. Déterminer la distance de M à $\mathcal{P}$.