Exercice 1 Soit $\mathcal{D} : x + 3y - 4 = 0$ et $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4y - 16 = 0$.

1. Donner un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
Correction $A(4, 0)$ et $B(1, 1)$ sont des points de $\mathcal{D}$. Donc, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (-3, 1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
2. Déterminer le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.
Correction Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$$x^2 + y^2 + 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 - 4 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 20$$
Donc, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $C(0, -2)$ et de rayon $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
3. Etudier $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$.
Correction Soit $M(x, y) \in \mathcal{D}$. Donc, $x = 4 - 3y$.
$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (4 - 3y)^2 + y^2 + 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow -20y + 10y^2 = 0 \Leftrightarrow 10y(y - 2) = 0$$
Donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{(4, 0), (-2, 2)\}$.

Exercice 2

1. Soit $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.
Correction $\mathcal{D}$ est la droite passant par $A(-1, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (2, -1)$. Donc,
$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x + 1 & 2 \\ y - 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -x - 1 - 2y + 2 = 0 \end{aligned}$$
Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $x + 2y - 1 = 0$.
2. Soit $\mathcal{D}' : y = 7x - 1$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$.
Correction $A(0, -1)$ et $B(1, 6)$ sont des points de $\mathcal{D}'$ donc $\overrightarrow{AB} = (1, 7)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$.
D'où $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = t \\ y = 7t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère les deux points $A(a, 0)$ et $B(0, 1)$. On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par A et B et le cercle $\mathcal{C}$ contenant A, B et O. Les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et O se coupent en un point D.

1. Déterminer une équation de la droite (AB).
Correction $\overrightarrow{AB} = (-a, 1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - a & -a \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x - a + ay = 0 \end{aligned}$$
Donc $\mathcal{D} : x + ay - a = 0$.
2. Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ passant par l'origine, A et B.
Correction On cherche le centre $C(x_C, y_C)$ et le rayon R du cercle $\mathcal{C}$. Il y a deux méthodes possibles.

- **Méthode 1 :** C est équidistant de A, B et O.

$$\begin{aligned} ||AC|| = ||BC|| = ||OC|| &\Leftrightarrow (x_C - a)^2 + y_C^2 = x_C^2 + (y_C - 1)^2 = x_C^2 + y_C^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2ax_C + a^2 = 0 \\ -2y_C + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{a}{2} \\ y_C = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $C\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Puis, $R = ||OC|| = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$.

- **Méthode 2 :** On remarque que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = a.0 + 0.1 = 0$.
Donc, $[AB]$ est le diamètre du cercle $\mathcal{C}$.
Donc, C est le centre du segment $[AB]$: $x_C = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}$ et $y_C = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.
Puis, $R = \frac{||\overrightarrow{AB}||}{2} = \frac{\sqrt{(-a)^2+1}}{2} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$.

3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ passant par O et de la tangente à $\mathcal{C}$ passant par A.
<u>Correction</u> $\overrightarrow{OC} = \left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est un vecteur normal à la droite tangente à $\mathcal{C}$ passant par O.
On la note $\mathcal{D}_O$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{D}_O &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OC} = 0 \\ &\Leftrightarrow x\frac{a}{2} + y\frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{D}_O : ax + y = 0$.
$\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est un vecteur normal à la droite tangente à $\mathcal{C}$ passant par A.
On la note $\mathcal{D}_A$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{D}_A &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-a)\frac{-a}{2} + y\frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{D}_A : ax - y - a^2 = 0$.

4. Déterminer les coordonnées de D. Quelle courbe décrit D ?
<u>Correction</u> D est le point d'intersection de $\mathcal{D}_O$ et de $\mathcal{D}_A$.

$$\begin{cases} ax_D + y_D = 0 \\ ax_D - y_D - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -\dfrac{y_D}{a} \\ 2y_D + a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \dfrac{a}{2} \\ y_D = -\dfrac{a^2}{2} \end{cases}$$

On remarque que $y_D = -2x_D^2$ donc D parcourt une parabole.

<u>Exercice</u> 4 Soient A et B deux points du plan.

1. Déterminer l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

Correction Notons $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ les points fixés. Soit $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 &\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - (x_A + x_B)x + x_A x_B + y^2 - (y_A + y_B)y + y_A y_B = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - \frac{(x_A + x_B)^2}{4} + x_A x_B + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 - \frac{(y_A + y_B)^2}{4} + y_A y_B = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 = \frac{(x_A + x_B)^2}{4} - x_A x_B + \frac{(y_A + y_B)^2}{4} - y_A y_B \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 = \frac{(x_A - x_B)^2}{4} + \frac{(y_A - y_B)^2}{4} \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 = \left(\frac{||AB||}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

On reconnait le cercle de centre $C\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{||AB||}{2}$.
Le centre est le milieu du segment $[AB]$ et le diamètre est $||AB||$.

2. A quel résultat de géométrie cela correspond-il ?
   Correction On retrouve le théorème de Pythagore.

Exercice 5 Soient $A(0, 3, -1)$, $B(1, 1, 0)$ et $C(1, -1, 2)$.

1. Justifier que ces trois points permettent de définir un unique plan $\mathcal{P}$.
   Correction On va regarder si ces points permettent de définir des vecteurs non colinéaires.
   On a $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1, -4, 3)$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   La seule solution du système est $(0, 0)$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C définissent bien un unique plan dont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs.
2. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.
   Correction Le plan passe par $A(0, 3, -1)$ et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc
   $\mathcal{P} : \begin{cases} x = t + t' \\ y = -2t - 4t' + 3 \\ z = t + 3t' - 1 \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2.$
3. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
   Correction On cherche un vecteur normal au plan. Donc, on cherche $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ tel que $<\overleftarrow{AB}, \overrightarrow{n}> = <\overleftarrow{AC}, \overrightarrow{n}> = 0$.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} <\overleftarrow{AB}, \overrightarrow{n}> = 0 \\ <\overleftarrow{AC}, \overrightarrow{n}> = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ a - 4b + 3c = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ -2b + 2c = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = b \\ b = c \end{cases}
\end{aligned}$$

   On peut prendre $\overrightarrow{n} = (1, 1, 1)$.
   La plan $\mathcal{P}$ passe par $A(0, 3, -1)$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}$ donc

$$\begin{aligned}
M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \\
&\Leftrightarrow x + (y - 3) + (z + 1) = 0
\end{aligned}$$

donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $x+y+z-2=0$.

Exercice 6 On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A, B, C.
   Correction Les vecteurs $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$ et $\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$ sont non colinéaires et forment des vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$.
   Le vecteur $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(1,1,1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
   $$\begin{aligned} M(x,y,z)\in\mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)+y+z=0 \end{aligned}$$
   Donc $\mathcal{P}: x+y+z-1=0$.
2. Déterminer le projeté orthogonal du point O (origine du repère) sur $\mathcal{P}$.
   Correction Soit $H(x,y,z)$ le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$. On a donc
   $\begin{cases} H\in\mathcal{P} \\ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y=0 \\ -x+z=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}.$
3. En déduire la distance de 0 à $\mathcal{P}$.
   Correction Par définition, $d(O,\mathcal{P})=||OH||=\sqrt{3.\dfrac{1}{9}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 7 Soit $A(1,0,1)$, $B(0,1,2)$, $\overrightarrow{u}=(-1,1,1)$ et $\overrightarrow{v}=(1,0,0)$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
Soit $\mathcal{D}'$ la droite passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.

1. Combien y a-t-il de droites orthogonales à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$?
2. Déterminer celle qui passe par $C(0,2,4)$. On la notera Δ.

Correction

1. Il y en a une infinité.
2. On va déterminer un vecteur directeur de Δ. C'est donc un vecteur orthogonal à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.
   On cherche $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$ tel que
   $<\overleftarrow{u},\overrightarrow{n}>=<\overleftarrow{v},\overrightarrow{n}>=0$.
   $$\begin{aligned} \begin{cases} <\overleftarrow{u},\overrightarrow{n}>=0 \\ <\overleftarrow{v},\overrightarrow{n}>=0 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} -a+b+c=0 \\ a=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ -a+b+c=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b+c=0 \end{cases} \end{aligned}$$
   On peut prendre $\overrightarrow{n}=(0,1,-1)$.
   Une représentation paramétrique de Δ est donc $\begin{cases} x=0 \\ t=2+t \\ z=4-t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}.$