Chapitre 16 : Polynômes réels (prof)

Table des matières

1 Polynômes, règles de calculs

1.1 Ensemble des polynômes

Définition 1.

On appelle fonction polynomiale une fonction f pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k$ le polynôme associé à f.

On note $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

- P est le polynôme nul lorsque tous ces coefficients sont nuls.
  $P = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
- P est un polynôme constant lorsque $P = a_0$.
  $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0$.
- P est un monôme s'il admet un seul terme.
  $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $P = a_k \mathbf{X}^k$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_k x^k$.

1.2 Opérations sur l'ensemble des polynômes

Remarque 3. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

Pour un entier $m \geq n$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ en définissant $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_m = 0$.

Définition 4.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$. Soit $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On définit le polynôme $P + Q$ par $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k)\mathbf{X}^k$.

On définit le polynôme $\lambda.P$ par $\lambda.P = \sum_{k=0}^{n} \lambda.a_k \mathbf{X}^k$.

Remarque 5. On retrouve la stabilité par addition et par multiplication par un scalaire.

Définition 6.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$.
On définit le polynôme $\underline{PQ}$ par $(PQ)(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X}).Q(\mathbf{X})$.
On définit le polynôme $\underline{Q \circ P}$ par $(Q \circ P)(\mathbf{X}) = Q[P(\mathbf{X})]$.

Exemple 7. On pose $P = 2\mathbf{X}^2 + 1$, $Q = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X} + 1$. Déterminer $P + 3Q$, $P.Q$, $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

1.3 Identification

Théorème 8 (Identification)**.**

- Un polynôme est le polynôme nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.

Exemple 9. Soit $P = a\mathbf{X}^2 + b\mathbf{X} + c$.

1. Calculer $P(-\mathbf{X})$.
2. A quelle condition a-t-on $P(-\mathbf{X}) = P(\mathbf{X})$?
3. A quelle condition a-t-on $P(-\mathbf{X}) = -P(\mathbf{X})$?

1.4 Règles de calculs

Théorème 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$(\mathbf{X} + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\mathbf{X}^k$$

$$\mathbf{X}^n - a^n = (\mathbf{X} - a).\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\mathbf{X}^k\right)$$

Exemple 11. Développer $(\mathbf{X} - 1)^5$.

Exemple 12. Factoriser $\mathbf{X}^5 - 1$.

Exemple 13. Factoriser $\mathbf{X}^3 + 1$.

1.5 Degré d'un polynôme

Définition 14.

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

- On appelle <u>degré de P</u> le réel $\deg(P) = \max\{k \in [\![0, n]\!]\ ,\ a_k \neq 0\}$.
- Par convention, $\deg(0) = -\infty$.
- Le coefficient $a_{\deg(P)}$ est appelé <u>coefficient dominant</u> de P.

Exemple 15. Parmi les polynômes suivants :

$$A = \mathbf{X}^3 + 3\mathbf{X}^2 + 5\mathbf{X} + 2\ ,\ B = 3\mathbf{X}^{10} + (2 + \mathbf{i})\mathbf{X}^5 + 3\mathbf{X}\ ,\ C = \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 1\ ,\ D = \mathbf{i}\mathbf{X}^5\ ,\ E = 3\ ,\ F = 0$$

- Quels sont ceux qui appartiennent à $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$?
- Quels sont ceux de degré 3 ?
- Quels sont ceux dont le coefficient dominant vaut 1 ?
- Quel sont ceux dont le coefficient constant est pair ?

Théorème 16.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$.

1. $\deg(P + Q) \leq \max\left(\deg(P), \deg(Q)\right)$.
2. Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \max\left(\deg(P),\deg(Q)\right)$
3. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

Exemple 17. Déterminer deux polynômes P et Q tels que $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

1.6 Polynôme dérivé

Définition 18.

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.
On appelle polynôme dérivé de P le polynôme défini par

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k \mathbf{X}^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) a_{k+1} \mathbf{X}^k$$

Exemple 19. Déterminer le polynôme dérivé de $P = 5\mathbf{X}^4 + \mathbf{X}^2 + 3$.

Remarque 20. La fonction polynomiale associée à P' est la dérivée de la fonction polynomiale associée à P.

Théorème 21.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

1. Si $\deg(P) \geq 1$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
2. Si $\deg(P) \leq 0$ alors $\deg(P') = -\infty$.

Théorème 22.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

1. $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
2. $(PQ)' = P' \times Q + P \times Q'$.
3. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (Q^k)' = k Q' Q^{k-1}$.

Définition 23.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$. On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de P par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ P^{(m)} = (P^{(m-1)})' \end{cases}$$

Exemple 24. Déterminer les polynômes dérivés successifs de $P = 5\mathbf{X}^4 + \mathbf{X}^2 + 3$.

2 Racines et Factorisation

2.1 Existence de racines

Définition 25.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Théorème 26.

Tout polynôme réel non nul de degré impair admet au moins une racine réelle.

2.2 Factorisation

Théorème 27.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

1. α est une racine de P, c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$.
2. Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ tel que $P = (\mathbf{X} - \alpha)Q$.

Exemple 28. Calculer $P(1)$. En déduire une factorisation de $P = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 - 5\mathbf{X} + 3$.

Exemple 29. Proposer une factorisation du polynôme $P = \mathbf{X}^4 - 1$.

Remarque 30. Pour déterminer Q, on détermine son degré puis ses coefficients par identification.

Théorème 31.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ et soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ des racines **distinctes** de P.

$$\exists\, Q \in \mathbb{R}[\mathbf{X}],\quad P = \prod_{k=1}^{s} (\mathbf{X} - \alpha_k) \times Q$$

Remarque 32. Pour déterminer Q, on détermine son degré puis ses coefficients par identification.

2.3 Nombre de racines.

Théorème 33.

1. Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
2. Soit P un polynôme de degré au plus n. Si P admet $n+1$ racines distinctes alors $P=0$.
3. Si un polynôme admet une infinité de racines alors c'est le polynôme nul.

Exemple 34. Déterminer les polynômes P dans les cas suivants.

1. $\deg(P)=3$ et $P(-1)=P(1)=P(2)=P(3)=0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)=0$.

Théorème 35.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines **distinctes** $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$P = a_n \prod_{k=1}^{n} (\mathbf{X}-\alpha_k)$$

3 Racines multiples

3.1 Définition

Définition 36.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P. Soit $r \in \mathbb{N}$.
On dit que α est une racine de multiplicité r lorsque

$$\exists\, Q \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \text{ tel que } P=(\mathbf{X}-\alpha)^r Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0.$$

1. Pour $r=1$, on parle de racine simple.
2. Pour $r=2$, on parle de racine double.
3. Pour $r \geq 2$, on parle de racine multiple.

Remarque 37. La multiplicité d'une racine α d'un polynôme P est la plus grande puissance de $\mathbf{X}-\alpha$ qu'on peut mettre en facteur dans P.

Exemple 38. Déterminer les racines des polynômes suivants et dire si elles sont simples ou multiples.

1. $P=(\mathbf{X}+2)(\mathbf{X}-3)^2(\mathbf{X}+1)^5$
2. $P=\mathbf{X}^5-2\mathbf{X}^4+\mathbf{X}^3$

3.2 Caractérisation

Théorème 39.

Soient $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

1. α est racine multiple de P
2. $P(\alpha)=0$ et $P'(\alpha)=0$.

Exemple 40. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $P = 1 + \mathbf{X} + \dfrac{\mathbf{X}^2}{2!} + \dfrac{\mathbf{X}^3}{3!}$. Montrer que P n'a que des racines simples.

Théorème 41 (Hors-Programme)**.**

Soient $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$. On a équivalence entre :

1. α est racine de P de multiplicité r
2. $P(\alpha) = 0,\ P'(\alpha) = 0, \ldots,\ P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.