

Exercice 1 Soit $m \in \mathbb{R}$, $m \neq -3$, $m \neq 0$.

Calculer la seconde solution des équations suivantes.

1. $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est solution.
2. $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est solution.
3. $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est solution.

Exercice 2

1. Déterminer les solutions évidentes des équations suivantes
 - (a) $x^2 - 6x + 9 = 0$.
 - (b) $x^2 + 4x - 12 = 0$.
2. En utilisant la relation coefficients-solutions, résoudre les équations suivantes.
 - (a) $x^2 - 13x + 42 = 0$.
 - (b) $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Exercice 3 Pour les polynômes proposés, calculer PQ , $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

1. $P = 2X^2 - 1$ et $Q = X$.
2. $P = X^2 + 3$ et $Q = X^3 + X + 1$.
3. $P = X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q = X - 1$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant des polynômes suivants :

$$P = (X + 1)^5 - X^5, \quad Q = (1 - X^3)^5 + (X^5 - 1)^3, \quad R = (X - 1)^n - (X + 1)^n.$$

Exercice 5

1. Proposer deux polynômes P et Q de degré 1 tels que

$$P(1) = 0, \quad P(2) = 1, \quad Q(2) = 0, \quad Q(1) = 1$$

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Proposer deux polynômes P_a et P_b de degré 1 tels que

$$P_a(a) = 1, \quad P_a(b) = 0, \quad P_b(a) = 0, \quad P_b(b) = 1$$

Exercice 6 On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

1. Déterminer P_2 et P_3 .
2. Conjecturer, pour $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n et le coefficient dominant de P_n .
3. Démontrer votre conjecture.

Exercice 7 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = P(X + 1)$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = P(0)$.
2. En déduire que le polynôme $P - P(0)$ est le polynôme nul.
3. En déduire les valeurs possibles de P .

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère le polynôme $P = (X + 1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $P = X(X + 1)Q$.
2. Quel est le degré de Q ?
3. (-1) est-il une racine multiple de P ?

Exercice 9 Soit $n \geq 2$. Soit $P = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$.

1. Justifier que 2 est une racine de P .
2. Est-ce une racine multiple de P ?

Exercice 10 [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (1 + \mathbf{X})^{2n}$.

1. Développer P . En déduire le coefficient devant le monôme \mathbf{X}^n .
2. En écrivant $P = (1 + \mathbf{X})^n \cdot (1 + \mathbf{X})^n$, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice 11 [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (1 + \mathbf{X})^n$.

1. Développer P .
2. Déterminer deux expressions de P' .
3. En déduire que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$