

Exercice 1 Soit $m \in \mathbb{R}$, $m \neq -3$, $m \neq 0$.

Calculer la seconde solution des équations suivantes.

1. $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est solution.

Correction On rappelle que dans une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, le produit des deux solutions vaut $\frac{c}{a}$.

Si on note y la seconde solution, alors $4y = \frac{8}{3}$ donc la seconde racine est $\frac{2}{3}$.

2. $mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est solution.

Correction On rappelle que dans une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, le produit des deux solutions vaut $\frac{c}{a}$.

Si on note y la seconde solution, alors $-2y = \frac{2}{m}$ donc la seconde racine est $\frac{-1}{m}$.

3. $(m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est solution.

Correction On rappelle que dans une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, le produit des deux solutions vaut $\frac{c}{a}$.

Si on note y la seconde solution, alors $my = \frac{2m^2}{m+3}$ donc la seconde racine est $\frac{2m}{m+3}$.

Exercice 2

1. Déterminer les solutions évidentes des équations suivantes

(a) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Correction $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ donc l'unique solution est 3.

(b) $x^2 + 4x - 12 = 0$.

Correction 2 est une racine évidente. Le produit des deux solutions vaut -12 donc l'autre solution est -6 .

2. En utilisant la relation coefficients-solutions, résoudre les équations suivantes.

(a) $x^2 - 13x + 42 = 0$.

Correction On rappelle que dans une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, le produit des deux solutions vaut $\frac{c}{a}$ et la somme vaut $\frac{-b}{a}$.

Si x et y sont les solutions alors $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 42 \end{cases}$ Donc, les solutions sont 6 et 7.

(b) $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Correction On rappelle que dans une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, le produit des deux solutions vaut $\frac{c}{a}$ et la somme vaut $\frac{-b}{a}$.

Si x et y sont les solutions alors $\begin{cases} x + y = -8 \\ xy = 15 \end{cases}$ Donc, les solutions sont -3 et -5 .

Exercice 3

Pour les polynômes proposés, calculer PQ , $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

1. $P = 2\mathbf{X}^2 - 1$ et $Q = \mathbf{X}$.

Correction $PQ = (2\mathbf{X}^2 - 1)\mathbf{X} = 2\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}$.

$$P \circ Q = 2Q^2 - 1 = P = 2\mathbf{X}^2 - 1 \text{ et } Q \circ P = P = 2\mathbf{X}^2 - 1.$$

2. $P = \mathbf{X}^2 + 3$ et $Q = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X} + 1$.

Correction $PQ = (\mathbf{X}^2 + 3)(\mathbf{X}^3 + \mathbf{X} + 1) = \mathbf{X}^5 + \mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X}^3 + 3\mathbf{X} + 3 = \mathbf{X}^5 + 4\mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + 3$.

$$P \circ Q = Q^2 + 3 = (\mathbf{X}^3 + \mathbf{X} + 1)^2 + 3 = \mathbf{X}^6 + 2\mathbf{X}^4 + 2\mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4.$$

$$\begin{aligned} Q \circ P &= P^3 + P + 1 = (\mathbf{X}^2 + 3)^3 + \mathbf{X}^2 + 3 + 1 = \mathbf{X}^6 + 9\mathbf{X}^4 + 27\mathbf{X}^2 + 27 + \mathbf{X}^2 + 4 \\ &= \mathbf{X}^6 + 9\mathbf{X}^4 + 28\mathbf{X}^2 + 31. \end{aligned}$$

3. $P = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 1$ et $Q = \mathbf{X} - 1$.

$$\text{Correction } PQ = (\mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 1)(\mathbf{X} - 1) = \mathbf{X}^4 + \mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} - \mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^2 - \mathbf{X} - 1 = \mathbf{X}^4 - 1.$$

$$P \circ Q = Q^3 + Q^2 + Q + 1 = \mathbf{X}^3 - 3\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} - 1 + \mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X} + 1 + \mathbf{X} - 1 + 1 = \mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X}.$$

$$Q \circ P = P - 1 = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X}.$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant des polynômes suivants :

$$P = (\mathbf{X} + 1)^5 - \mathbf{X}^5, \quad Q = (1 - \mathbf{X}^3)^5 + (\mathbf{X}^5 - 1)^3, \quad R = (\mathbf{X} - 1)^n - (\mathbf{X} + 1)^n.$$

Correction

- $P = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \mathbf{X}^k - \mathbf{X}^5 = \sum_{k=0}^4 \binom{5}{k} \mathbf{X}^k.$

P est de degré 4, son coefficient dominant est $\binom{5}{4} = 5$ et son coefficient constant est $\binom{5}{0} = 1$.

- $Q = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-\mathbf{X}^3)^k + \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (\mathbf{X}^5)^k (-1)^{3-k} = -\mathbf{X}^{15} + 5\mathbf{X}^{12} + \cdots + 1 + \mathbf{X}^{15} - 3\mathbf{X}^{10} + \cdots - 1.$

Q est de degré 12, son coefficient dominant est 5 et son coefficient constant est 0.

- $R = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathbf{X}^k (-1)^{n-k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathbf{X}^k = \mathbf{X}^n - n\mathbf{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n - \mathbf{X}^n - n\mathbf{X}^{n-1} - \cdots - 1.$

R est de degré $n - 1$, son coefficient dominant est $-2n$ et son coefficient constant est $(-1)^n - 1$.

Exercice 5

1. Proposer deux polynômes P et Q de degré 1 tels que

$$P(1) = 0, \quad P(2) = 1, \quad Q(2) = 0, \quad Q(1) = 1$$

Correction Voir la généralisation en dessous.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Proposer deux polynômes P_a et P_b de degré 1 tels que

$$P_a(a) = 1, \quad P_a(b) = 0, \quad P_b(a) = 0, \quad P_b(b) = 1$$

Correction P_a est un polynôme de degré au plus 1 : $\exists (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 / P = a_0 + a_1 \mathbf{X}$.

$$\begin{cases} P_a(a) = 1 \\ P_a(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 \cdot a = 1 \\ a_0 + a_1 \cdot b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot (a - b) = 1 \\ a_0 = -a_1 \cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{a - b} \\ a_0 = \frac{-b}{a - b} \end{cases}$$

$$\text{Donc, } P_a = \frac{-b}{a - b} + \frac{1}{a - b} \mathbf{X} = \frac{\mathbf{X} - b}{a - b}.$$

$$\text{Avec le même raisonnement, on obtient } P_b = \frac{\mathbf{X} - a}{b - a}.$$

Exercice 6 On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \mathbf{X} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = 2\mathbf{X}P_{n+1} - P_n$$

1. Déterminer P_2 et P_3 .
2. Conjecturer, pour $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n et le coefficient dominant de P_n .

3. Démontrer votre conjecture.

Correction

1. $P_2 = 2\mathbf{X}P_1 - P_0 = 2\mathbf{X}^2 - 1.$
 $P_3 = 2\mathbf{X}P_2 - P_1 = 2\mathbf{X}(2\mathbf{X}^2 - 1) - \mathbf{X} = 4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X} - 1.$
2. On conjecture que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n$ et que son coefficient dominant est 2^{n-1} .
3. On le démontre par récurrence **double**.

I Pour $n = 1, 2$,

$P_1 = \mathbf{X}$ et $P_2 = 2\mathbf{X}^2 - 1$ donc $H(1)$ et $H(2)$ sont vraies.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ soient vraies.

Par hypothèse de récurrence, il existe 2 polynômes Q_n et Q_{n+1} tels que $P_n = 2^{n-1}\mathbf{X}^n + Q_n$ et $P_{n+1} = 2^n\mathbf{X}^n + Q_{n+1}$ avec $\deg(Q_n) \leq n-1$ et $\deg(Q_{n+1}) \leq n$.

Donc, $P_{n+2} = 2\mathbf{X}P_{n+1} - P_n = 2\mathbf{X}(2^n\mathbf{X}^{n+1} + Q_{n+1}) - 2^{n-1}\mathbf{X}^n - Q_n = 2^{n+1}\mathbf{X}^{n+2} + Q$ où $\deg(Q) \leq n+1$.

Donc le degré le P_{n+2} vaut $n+2$ et son coefficient dominant est 2^{n+1} .

Donc, $H(n+2)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n$ et que le coefficient dominant est 2^{n-1} .

Exercice 7 Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ tel que $P(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X} + 1)$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.
2. En déduire que le polynôme $P - P(0)$ est le polynôme nul.
3. En déduire les valeurs possibles de P .

Correction

1. On le démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H(n) : P(n) = P(0)$.

I : Pour $n = 0$: $P(0) = P(0)$ donc $H(0)$ est vraie.

H : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie.

Par hypothèse sur P , $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = P(x+1)$. Donc, $P(n+1) = P(n) = P(0)$.
 Donc, $H(n+1)$ est vraie.

C : Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.

2. Le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.
3. On en déduit que $P = P(0)$. P est donc un polynôme constant.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère le polynôme $P = (\mathbf{X} + 1)^{2n+1} - \mathbf{X}^{2n+1} - 1$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $P = \mathbf{X}(\mathbf{X} + 1)Q$.
2. Quel est le degré de Q ?
3. (-1) est-il une racine multiple de P ?

Correction

1. On remarque que $\mathbf{X}^2 + \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{X} + 1)$.
 Or, $P(0) = 1 - 1 = 0$ donc 0 est une racine de P .
 $P(-1) = -(-1)^{2n+1} - 1 = 0$ donc -1 est une racine de P .
 On a deux racines distinctes de P donc il existe un polynôme Q tel que $P = \mathbf{X}(\mathbf{X} + 1)Q$.
2. Par les propriétés sur le degré, $\deg(P) = \deg(\mathbf{X}(\mathbf{X} + 1)) + \deg(Q)$.
 Or, $\deg(P) = 2n$ donc $\deg(Q) = 2n - 2 = 2(n - 1)$.

3. On utilise la caractérisation des racines multiples.

$$P' = (2n+1)(\mathbf{X}+1)^{2n} - (2n+1)\mathbf{X}^{2n}.$$

$$P'(-1) = -(2n+1)(-1)^{2n} \neq 0 \text{ donc } -1 \text{ n'est pas une racine multiple de } P.$$

Exercice 9 Soit $n \geq 2$. Soit $P = n\mathbf{X}^{n+2} - (4n+1)\mathbf{X}^{n+1} + 4(n+1)\mathbf{X}^n - 4\mathbf{X}^{n-1}$.

1. Justifier que 2 est une racine de P .
2. Est-ce une racine multiple de P ?.

Correction

1. On remarque d'abord que $P = \mathbf{X}^{n-1}[n\mathbf{X}^3 - (4n+1)\mathbf{X}^2 + 4(n+1)\mathbf{X} - 4]$.

$$P(2) = 2^{n-1}[8n - 4(4n+1) + 8(n+1) - 4] = 0.$$

Donc, 2 est une racine de P .

2. $P' = (n-1)\mathbf{X}^{n-2}[n\mathbf{X}^3 - (4n+1)\mathbf{X}^2 + 4(n+1)\mathbf{X} - 4] + \mathbf{X}^{n-1}[3n\mathbf{X}^2 - 2(4n+1)\mathbf{X} + 4(n+1)]$.

$$P'(2) = 0 + 2^{n-1}[12n - 4(4n+1) + 4(n+1)] = 0.$$

Donc 2 est une racine multiple de P .

Exercice 10 [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (1+\mathbf{X})^{2n}$.

1. Développer P . En déduire le coefficient devant le monôme \mathbf{X}^n .
2. En écrivant $P = (1+\mathbf{X})^n \cdot (1+\mathbf{X})^n$, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Correction

1. Par la formule du binôme de Newton, $P = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mathbf{X}^k$. Le coefficient d'indice n est donc $\binom{2n}{n}$.

$$2. (1+\mathbf{X})^n \cdot (1+\mathbf{X})^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathbf{X}^k \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \mathbf{X}^\ell \right) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} \mathbf{X}^{k+\ell} = \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=0}^j \binom{n}{k} \binom{n}{j-k} \mathbf{X}^j.$$

où on a posé $j = k + \ell$. Le coefficient d'indice n est $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Par unicité des coefficients, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 11 [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (1+\mathbf{X})^n$.

1. Développer P .
2. Déterminer deux expressions de P' .
3. En déduire que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Correction

1. Par la formule du binôme de Newton, $P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathbf{X}^k$.

2. Par la question précédente, $P' = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \mathbf{X}^{k-1}$.

Par la définition de P , $P' = n(1 + \mathbf{X})^{n-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathbf{X}^k = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \mathbf{X}^{k-1}$.

3. Par identification, on obtient que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$