

# Chapitre 17 : Suites réelles, partie 2

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Ensembles des suites réelles</b>	<b>2</b>
1.1	Opérations sur l'ensemble des suites . . . . .	2
1.2	Suites bornées et suites monotones . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Limite d'une suite</b>	<b>2</b>
2.1	Opérations sur les limites . . . . .	2
2.2	Limite finie . . . . .	2
2.3	Limite infinie . . . . .	3
2.4	Limites et inégalités . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Suites extraites et Suites adjacentes</b>	<b>3</b>
3.1	Suites extraites . . . . .	3
3.2	Suites adjacentes . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Suites équivalentes</b>	<b>5</b>
4.1	Définition . . . . .	5
4.2	Opérations sur les équivalents . . . . .	5
4.3	Equivalents usuels . . . . .	6
4.4	Equivalents et limites . . . . .	6
4.5	Opérations NON autorisées sur les équivalents. . . . .	6

# 1 Ensembles des suites réelles

## Définition 1.

On appelle suite réelle toute application  $u$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ .  
On note souvent une suite sous la forme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On note  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites réelles.

## 1.1 Opérations sur l'ensemble des suites

### Définition 2.

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- On définit la suite somme  $u + v$  par  $\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)_n = u_n + v_n$ .
- On définit la suite  $\lambda.u$  par  $\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda.u)_n = \lambda \times u_n$ .
- On définit la suite produit  $u.v$  par  $\forall n \in \mathbb{N}, (u.v)_n = u_n \times v_n$ .

L'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est stable par chacune de ces opérations.

**Exemple 3.** Proposer deux suites non nulles dont le produit donne la suite nulle.

## 1.2 Suites bornées et suites monotones

# 2 Limite d'une suite

## 2.1 Opérations sur les limites

## 2.2 Limite finie

### Définition 4.

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

On dit que la suite  $u$  admet une limite finie  $\ell$  lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ . On dit que la suite converge vers  $\ell$ .

### Remarque 5.

- A partir du rang  $n_0$ , les termes de la suite sont dans l'intervalle  $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ .
- Le rang  $n_0$  dépend de  $\varepsilon$ . Plus  $\varepsilon$  est petit, plus  $n_0$  est grand.

**Théorème 6.**

1. Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$  si, et seulement si, la suite  $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
2. Si une suite admet une limite finie alors cette limite est unique.
3. Si une suite converge alors elle est bornée.

**Théorème 7.**

Soient  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles.

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$ .

## 2.3 Limite infinie

**Définition 8.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

On dit que la suite  $u$  admet une limite infinie  $+\infty$  lorsque

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A)$$

On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . On dit que la suite diverge.

**Définition 9.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

On dit que la suite  $u$  admet une limite infinie  $-\infty$  lorsque

$$\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A)$$

On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ . On dit que la suite diverge.

**Théorème 10.**

Soient  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles.

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$ .

## 2.4 Limites et inégalités

## 3 Suites extraites et Suites adjacentes

### 3.1 Suites extraites

**Théorème 11.**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle **convergente**, de limite  $\ell$ .

1. La suite  $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la même limite  $\ell$ .
2. Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . La suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\ell)$ .

**Remarque 12.** C'est ce qui permet de démontrer le théorème du point fixe.

**Définition 13.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

On appelle suite extraite de rangs pairs la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}$ .

On appelle suite extraite de rangs impairs la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n+1}$ .

**Théorème 14.**

Soit  $u$  une suite réelle. Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

1. La suite  $u$  converge vers  $\ell$  (resp.  $-\infty$  ou  $+\infty$ ) si, et seulement si, les suites extraites de rangs pairs et de rangs impairs convergent vers  $\ell$  (resp.  $-\infty$  ou  $+\infty$ ).
2. Si les suites extraites de rangs pairs et de rangs impairs ne convergent pas vers la même limite alors la suite  $u$  est divergente.

**Exemple 15.** Déterminer la nature de la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\pi)$ .

**Exemple 16.** Déterminer la nature de la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$ .

### 3.2 Suites adjacentes

**Définition 17.**

Soient  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles.

On dit que ces suites sont adjacentes lorsque :

1. la suite  $u$  est croissante,
2. la suite  $v$  est décroissante,
3. la suite  $v - u$  converge vers 0.

**Exemple 18.** Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

**Théorème 19.**

Soient  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites adjacentes (avec  $u$  croissante et  $v$  décroissante).

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
2. les suites  $u$  et  $v$  convergent et ont la même limite  $\ell$ .
3.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n$

## 4 Suites équivalentes

### 4.1 Définition

#### Définition 20.

Soient  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles avec la suite  $v$  non nulle à partir d'un certain rang.

On dit que la suite  $u$  est équivalente la suite  $v$  lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ .

On lit " $u_n$  est équivalent de  $v_n$  en  $+\infty$ " et on note  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ .

#### Exemple 21.

- $n^5 + 3n^3 - 7 \underset{+\infty}{\sim} n^5$ .
- Soit  $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$  de degré  $d$  alors  $P(n) \underset{+\infty}{\sim} a_d n^d$ .
- $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$ .
- Lorsqu'une suite  $u$  converge vers  $\ell \neq 0$ , on peut écrire  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$ .

**Remarque 22.** C'est une relation symétrique : si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  alors  $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ .

#### Théorème 23.

Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles,  $v$  non nulle à partir d'un certain rang (APCR).

On a équivalence entre

1.  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ .
2. Il existe une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$  et  $u_n = v_n(1 + w_n)$  APCR

#### Exemple 24.

1. Déterminer un équivalent simple de la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n) + n$ .
2. Déterminer un équivalent simple de la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n + \sqrt{n}$ .

### 4.2 Opérations sur les équivalents

#### Théorème 25.

Soient  $u, v, u'$  et  $v'$  quatre suites réelles non nulles à partir d'un certain rang.

1. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  et  $v_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n$  alors  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n$ .
2. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  et  $u'_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n$  alors  $u_n \times u'_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \times v'_n$ .
3. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  alors  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot u_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda \cdot v_n$ .
4. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  alors  $\frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$ .
5. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  et  $u'_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n$  alors  $\frac{u_n}{u'_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{v_n}{v'_n}$ .
6. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  alors  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$ .

**Exemple 26.** Déterminer un équivalent simple de la suite définie par  $\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$ .

**Exemple 27.** Déterminer un équivalent simple de la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n) + n}{n + \sqrt{n}}$ .

### 4.3 Equivalents usuels

#### Théorème 28.

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite non nulle à partir d'un certain rang telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

$$\cos(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \quad \sin(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \quad \tan(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \quad e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \quad \ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$$

$$\cos(u_n) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2} \quad \sqrt{1 + u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$$

**Exemple 29.** Déterminer un équivalent simple de la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n \cdot \sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ .

### 4.4 Equivalents et limites

#### Théorème 30.

Soient  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  et si  $v$  converge vers  $\ell$  alors  $u$  converge aussi vers  $\ell$ .

**Exemple 31.** Déterminer la limite des suites proposées.

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = \frac{2n^2 + 5n - 1}{(3n - 1)(1 - n)}$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{2}{n}} - 1}$ .

### 4.5 Opérations NON autorisées sur les équivalents.

**Exemple 32.** Soient deux suites  $u$  et  $v$  définies par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 + n$  et  $v_n = -n^2$ .

1. Déterminer un équivalent de chacune des suites.
2. Déterminer un équivalent de la suite  $u + v$ .
3. Conclure.

**Exemple 33.** Déterminer la limite de la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .