Exercice 1 Calculer les limites en $+\infty$ des suites suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 - n\cos(n) + 2$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n - n^4 + 3n + 4}{n^3 + 2}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{(\ln(n))^2 - 2}{n + \ln(n)}$.

Exercice 2 Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2+u_n}$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{2+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
3. Etudier la monotonie de la suite u.
4. En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.
5. Que se passe-t-il si $u_0 = 1$?

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. C'est la *suite harmonique*.

1. Montrer que la suite H est croissante.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite n'est pas convergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 4 [*] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 5 Déterminer des équivalents pour les suites proposées.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n^2 + 3n - 6$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4n^3 + 2n + \cos(n)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 10}$.
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n^2 + n + 1)^3$
7. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2024}$
8. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}$
9. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\sin\left(\dfrac{2}{n^2}\right)$
10. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$
11. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\mathbf{e}^{\frac{3}{n^2}} - 1}$
12. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n}$

Exercice 6 Déterminer des équivalents pour les suites proposées et en déduire leur limite .

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n^3 + n\sin(n^{10} + n^7)}{n + \ln n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2(\ln n)^4 - n^3(\ln n)^2 + (-1)^n n^2 e^{-n}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}\ln n}{\sqrt{n+2}}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(2n^{15}) + 15n^2$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln\left(\dfrac{n^2 + 3n + 6}{n^2 + 1}\right)$

6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(3n^{10}+1)$
7. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ u_n = \ln\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\right)$
8. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^2 \ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
9. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \exp(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})-1$
10. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\ln(n^3+1)}{n^2-n+2}$
11. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n^3+n+1}{n+\sqrt{n}}e^{-n}$
12. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^3+5n+2}{3^n+3(-1)^n}$
13. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^{2n}+2^{3n}$
14. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathbf{e}^n+\mathbf{e}^{2n}-\sqrt{\mathbf{e}^n}$
15. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\mathbf{e}^n-\mathbf{e}^{-n}}{\mathbf{e}^n+\mathbf{e}^{-n}}$
16. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(2-\mathbf{e}^{\frac{1}{n}})$
17. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(\dfrac{2n^2+1}{n^2+n+1}\right)$
18. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sqrt{1+\mathbf{e}^{-n}}-1}{\mathbf{e}^{-2n}}$
19. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (2n)^{\frac{1}{n}}-1$
20. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{\mathbf{e}^{\frac{1}{n}}}-1$

Exercice 7 On considère la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{1+3u_n}.$$

. On pose : $f : x \mapsto \dfrac{3}{1+3x}$.

1. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}_+$ et construire les premiers termes de la suite.
2. On pose $I = [0,3]$. Montrer que I est stable par f (c'est à dire que $f(I) \subset I$, ou encore $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.)
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 3$.
4. Déterminer les points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+$ (c'est à dire les réels x vérifiant $f \circ f(x) = x$).
5. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies contraires.
6. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.
7. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 8

1. Soit $f_3 : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^3+x^2+x-1$.
   (a) Montrer que f_3 est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser.
   (b) En déduire que l'équation $f_3(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_3.
   (c) Montrer que $x_3 \geq \dfrac{1}{2}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
      i. Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser.
      ii. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On la note x_n.
   (b) Déterminer x_1 et x_2.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq \dfrac{1}{2}$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$.
   En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (e) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.