

**Exercice 1** Déterminer les limites suivantes

1.  $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$  en  $+\infty$ .
2.  $f(x) = \frac{x^5-x}{x^2-1}$  en  $+\infty$ .
3.  $f(x) = e^x - 2x + 1$  en  $+\infty$ .
4.  $f(x) = 3xe^{-x^2}$  en  $+\infty$ .
5.  $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$  en  $+\infty$ .
6.  $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$  en  $+\infty$ .
7.  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$  en 0.
8.  $f(x) = \cos(5x)e^{-3x}$  en  $+\infty$ .
9.  $f(x) = \frac{\sin(2x)}{5x}$  en 0.
10.  $f(x) = \frac{x \sin(x)}{x^2+1}$  en  $+\infty$ .
11.  $f(x) = e^{x-\sin(x)}$  en  $+\infty$ .

**Exercice 2** Limites et parties entières

1. Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x[x]$ .  
Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ .  
Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

**Exercice 3** Limites et fonction sinus

1. Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en  $+\infty$ .
2. Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
Montrer que la fonction  $f$  n'admet pas de limite en 0.
3. Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
Déterminer la limite de  $f$  en 0.

**Exercice 4** [\*] Montrer que la fonction  $\tan$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

**Exercice 5** Étudier les limites suivantes. Dans beaucoup de cas, il pourra être intéressant de faire un calcul d'équivalent.

1.  $\frac{x^3+x+52}{4x^3-30x^2}$  en  $+\infty$
2.  $\frac{\sin(x \ln x)}{x}$  en 0
3.  $\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$  en 1
4.  $\frac{x^2-3x+2}{x^n-1}$  en 1 avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .
5.  $x^{\frac{1}{x}}$  en  $+\infty$
6.  $x^x$  en 0
7.  $\sqrt{x^2+2x}-x$  en  $+\infty$
8.  $\frac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$  en 0
9.  $2x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$  en  $+\infty$
10.  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  en  $+\infty$
11.  $x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$  en  $+\infty$
12.  $\ln(3x^2+2x) - \ln(2x^2+3x)$  en  $+\infty$
13.  $(1 - e^x) \ln x$  en 0.
14.  $\frac{\sin(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$  en  $\frac{\pi}{4}$
15.  $\frac{\sin(3x)}{\sqrt{1-2\cos(x)}}$  en  $\frac{\pi}{3}$

**Exercice 6** Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point indiqué.

1.  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$  en  $+\infty$  et en 0.
2.  $x^2 + x + 2 \ln(x)$  en 0 et en  $+\infty$ .
3.  $e^x + x^2$  en 0 et en  $+\infty$ .
4.  $\ln(1 + \sin(x))$  en 0.
5.  $\ln(\cos(x))$  en 0.
6.  $\ln(\sin(x))$  en  $\frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 7** Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité aux points indiqués ?

1.  $x \mapsto x \ln(2x)$  en 0.
2.  $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$  en 0.
3.  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  en 0.
4.  $x \mapsto \frac{e^x}{x}$  en 0.
5.  $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  en 0.
6.  $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$  en 0.
7.  $x \mapsto \frac{(x-2)^2(x-3)}{x^2-3x+2}$  en 1 et en 2.
8.  $x \mapsto \tan(x) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  en  $\frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 8** Etudier la continuité ou le prolongement par continuité des fonctions suivantes aux points demandés.

1.  $g : x \mapsto [x] + (x - [x])^2$  en 0.
2.  $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  en 0.
3.  $h : x \mapsto \frac{x^{[x]}}{[x]^x}$  en 2.