

Chapitre 18 : Limites et continuité de fonctions réelles

Table des matières

1	Limites d'une fonction	2
1.1	Limites en $-\infty$ ou en $+\infty$	2
1.2	Limites en un point	3
1.3	Limites à gauche et à droite en un point	4
1.4	Quelques propriétés de la limite	4
1.5	Propriété séquentielle de la limite	4
2	Opérations sur les limites	5
3	Propriétés de la limite	5
3.1	Limites et inégalités	5
3.2	Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration	5
3.3	Théorème de la limite monotone	5
3.4	Croissances comparées	6
4	Fonctions équivalentes	6
4.1	Définition	6
4.2	Propriétés des fonctions équivalentes	6
4.3	Opérations compatibles avec les équivalents	7
4.4	Équivalents usuels	7
4.5	Substitution dans les équivalents	7
4.6	Opérations NON autorisées sur les équivalents.	8
5	Continuité locale d'une fonction	8
5.1	Continuité en un point	8
5.2	Continuité à gauche et à droite	8
5.3	Continuité et suites	9
5.4	Prolongement par continuité en un point	9

Définition 5 (Limites en $-\infty$).

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que la fonction f admet une limite finie ℓ en $-\infty$ lorsque
- On dit que la fonction f diverge vers $+\infty$ en $-\infty$ lorsque
- On dit que la fonction f diverge vers $-\infty$ en $-\infty$ lorsque

1.2 Limites en un point**Définition 6.**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f admet une limite finie ℓ en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Remarque 7. Le réel η dépend du réel ε vu l'ordre des quantificateurs.

Définition 8.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$.

On dit que la fonction f admet une limite infinie $+\infty$ en a lorsque

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M$$

On dit que la fonction f admet une limite infinie $-\infty$ en a lorsque

$$\forall M < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq M$$

1.3 Limites à gauche et à droite en un point

Définition 9.

Soit I un intervalle borné de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$.

On dit que f admet une limite finie ℓ à gauche en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a - \eta \leq x \leq a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On dit que f admet une limite finie ℓ à droite en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a \leq x \leq a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Exemple 10. Soit $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ la fonction partie entière.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \lfloor x \rfloor = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \lfloor x \rfloor = 0$$

Remarque 11.

1. Ces limites à gauche et à droite sont rencontrées lorsqu'on étudie une fonction qui a des valeurs interdites, pour lesquelles $D_f = I \setminus \{a\}$.
2. Les limites à gauche et à droite en a peuvent être différentes de la valeur que la fonction prend en a .

1.4 Quelques propriétés de la limite

Théorème 12.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet une limite en $a \in \bar{I}$ (resp. limite à gauche ou à droite) alors cette limite est unique.

On la note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$).

Théorème 13.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$. Soit $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. Si f est définie en a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \text{ et } f(a) = \ell$$

2. Si f n'est pas définie en a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$$

Exemple 14. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Montrer que la fonction f n'admet pas de limite en 0.

1.5 Propriété séquentielle de la limite

Exemple 15. Déterminer la limite suivante $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

Théorème 16 (Composition de limites).

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in \bar{I}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I .

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

Théorème 17.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in \bar{I}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans I .

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en a .

Exemple 18. Démontrer que la fonction \cos n'admet pas de limite en $+\infty$.

2 Opérations sur les limites

3 Propriétés de la limite

3.1 Limites et inégalités

3.2 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

3.3 Théorème de la limite monotone

Théorème 19.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **croissante**.

1. f admet une limite à droite en a .
2. f admet une limite à gauche en b .

Ces limites sont finies ou infinies.

Théorème 20.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **décroissante**.

1. f admet une limite à droite en a
2. f admet une limite à gauche en b .

Ces limites sont finies ou infinies.

3.4 Croissances comparées

Théorème 21.

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\beta e^{\alpha x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta \ln(x)^\alpha = 0.$$

4 Fonctions équivalentes

4.1 Définition

Définition 22.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in \bar{I}$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec g non nulle au voisinage de a .

On dit que f est équivalente en g en a lorsque la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite en a égale à 1.

On note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Exemple 23. Déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2}$. En déduire un équivalent de $x^2 - 2x + 5$ en $+\infty$.

Exemple 24.

- Soit $f(x) = x^2 + x + \ln(x)$. Déterminer des équivalents aux bords de l'intervalle de définition.
- Soit $g(x) = \sqrt{x + x^2}$. Déterminer des équivalents aux bords de l'ensemble de définition.

Remarque 25. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \neq 0$ alors $f \underset{a}{\sim} \ell$.

4.2 Propriétés des fonctions équivalentes

Théorème 26.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in \bar{I}$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ne s'annulant pas au voisinage de a .

1. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si g admet une limite (finie ou infinie) en a alors f admet la même limite en a .
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a .

4.3 Opérations compatibles avec les équivalents

Théorème 27.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in \bar{I}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Soient $f, g, h, k : I \rightarrow \mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a .

1. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$ alors $fh \underset{a}{\sim} gk$.
3. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
4. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$ alors $\frac{f}{h} \underset{a}{\sim} \frac{g}{k}$.
5. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Exemple 28. Déterminer un équivalent simple de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x}$ en 0 et en $+\infty$.

4.4 Equivalents usuels

Théorème 29.

- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$
- $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$
- $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

Exemple 30.

1. Déterminer un équivalent en 0 de $g(x) = \sqrt{\ln(1+x)}$
2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exemple 31. Déterminer un équivalent en 0 de $h(x) = \ln(1+x) + x$.

4.5 Substitution dans les équivalents

Théorème 32.

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Soit $a \in \bar{I}$.
Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a .
Soit $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $h(J) \subset I$.
Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = a$ alors $f(h(x)) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(h(x))$.

Exemple 33.

1. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\sin(e^{-x})$.
2. Déterminer un équivalent en 0 de $\tan(4x^3 + x)$.

Exemple 34. Déterminer la limite lorsque x tend vers 1 de $x \mapsto \frac{\sin^2(x-1)}{x^2 + x - 2}$.

Théorème 35.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in \bar{I}$.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ alors $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g(u_n)$.

Exemple 36.

1. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\cos(e^{-n}) - 1$.
2. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $n^{\frac{1}{n}} - 1$.

4.6 Opérations NON autorisées sur les équivalents.

Exemple 37. Soient deux fonctions f et g définies par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = x^2$.

1. Montrer que les fonctions f et g sont équivalentes en $+\infty$.
2. Est-ce que $\exp(f)$ et $\exp(g)$ sont équivalentes en $+\infty$?

Exemple 38. Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

5 Continuité locale d'une fonction**5.1 Continuité en un point****Définition 39.**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

La fonction f est continue en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Lorsque f n'admet pas de limite finie en a , on dit que f est discontinue en a .

Exemple 40. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

Cette fonction est-elle continue en 0 ?

Exemple 41. Les fonctions usuelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

5.2 Continuité à gauche et à droite**Définition 42.**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

La fonction f est continue à gauche en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

La fonction f est continue à droite en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Exemple 43. Etudier la continuité en 1 de la fonction partie entière.

Théorème 44.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
 f est continue en a si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a .

Exemple 45. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{pour } x < 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

Cette fonction est-elle continue en 0 ?

5.3 Prolongement par continuité en un point

Définition 46.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} de la forme $I =]a, b[$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
 On dit que f est prolongeable par continuité en a lorsque f admet une limite à droite finie en a , notée ℓ .
 Le prolongement est définie de la façon suivante :

$$\tilde{f}_a : \begin{cases} [a, b[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in]a, b[\\ \ell & \text{pour } x = a \end{cases} \end{cases}$$

On dit que f est prolongeable par continuité en b lorsque f admet une limite à gauche finie en b , notée ℓ' .
 Le prolongement est définie de la façon suivante :

$$\tilde{f}_b : \begin{cases}]a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in]a, b[\\ \ell' & \text{pour } x = b \end{cases} \end{cases}$$

Exemple 47. Soit f la définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Peut-on prolonger cette fonction par continuité en 0 ?

Exemple 48. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_-^* par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Peut-on prolonger cette fonction par continuité en 0 ?

Exemple 49. Montrer que la fonction $x \mapsto x^x$ peut être prolongée par continuité en 0.

5.4 Continuité et suites

Théorème 50.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en a .
 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.
 Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Exemple 51. Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \tan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Déterminer la nature de la suite u .

Théorème 52 (Théorème du point fixe).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ converge vers } \ell \in I, \\ f \text{ est continue sur } I, \end{cases}$ alors ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.