

**Exercice 1** Déterminer les développements limités à l'ordre indiqué en 0.

1.  $f(x) = xe^{-x}$  à l'ordre 3.
2.  $g(x) = \frac{\sin(x)}{x} \ln(1+x)$  à l'ordre 4.
3.  $h(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)$  à l'ordre 5.
4. Soit  $k(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ . Montrer que  $k(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^4)$ .

Correction

1.  $e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$  donc  $xe^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)$ .
2.  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^6)$  donc  $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathcal{O}(x^5)$ .  
 $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)$ .  
 Par produit,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathcal{O}(x^5)\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \mathcal{O}(x^4). \end{aligned}$$

3.  $\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1+x^2) - \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^5) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)\right)$   
 donc,  $\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)$
4.  $\frac{k(x)}{x^4} = \frac{1}{x^4} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{X^2}{e^X}$  avec  $X \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2}$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  et, par croissance comparée,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0$ .

Par composition de limites,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(x)}{x^4} = 0$ . Donc,  $k(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^4)$ .

**Exercice 2** Calculer les limites en 0, lorsqu'elles existent, des fonctions suivantes.

1.  $x \mapsto \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$
2.  $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1$
3.  $x \mapsto \frac{\sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x}{x^3}$

Correction

1.  $\frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2) - x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 + \mathcal{O}(1)$ .  
 Donc,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2} = -1$ .

2.  $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x) - 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \mathcal{O}(1)$  donc il faut un développement limité à l'ordre suivant.

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^2) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^2)\right)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \mathcal{O}(x).$$

Donc,  $\frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \mathcal{O}(x) - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(1)$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x} = 0$ .

3. On va proposer des développements limités à l'ordre 3 en 0 de chacune des fonctions présentes au numérateur.

$$\sqrt{1+2x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{2x}{2} - \frac{(2x)^2}{8} + \frac{(2x)^3}{16} + \mathcal{O}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3).$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3).$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3).$$

Donc,  $\frac{\sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - 1 + \frac{x^2}{2} - x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2}{3} + \mathcal{O}(1).$

Finalement,  $\left[ \frac{\sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{3} \right]$ .

**Exercice 3** Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \sin(x) \cos(2x)$
2.  $x \mapsto \sin(3x) - 3 \sin x$
3.  $x \mapsto \ln(2+x)$
4.  $x \mapsto \sqrt{2+3x}$
5.  $x \mapsto \ln(\cos x)$
6.  $x \mapsto e^{\sin x} - e^x$

Correction

1.  $\sin(x) \cos(2x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{13}{6}x^3 + o(x^3).$
2.  $\sin(3x) - 3 \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} -4x^3 + o(x^3).$
3.  $\ln(2+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3).$
4.  $\sqrt{2+3x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{2} \left[ 1 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{32}x^2 + \frac{27}{128}x^3 \right] + o(x^3).$
5.  $\ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$
6.  $e^{\sin x} - e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{6} + o(x^3).$

**Exercice 4** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \end{cases}$

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en  $x = 0$ .
2. Etudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Correction

1.  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$ . Donc,  $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^4)$ .  
Donc,  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$ .  
On en déduit que l'équation de la tangente en 0 est  $y = 1$ .

2. On étudie le signe au voisinage de 0 de  $f(x) - 1$ .

Or,  $f(x) - 1 = -\frac{x^2}{4}$ . Donc la courbe est en dessous de la tangente au voisinage de 0.

**Exercice 5** Soit  $f : \begin{cases} ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1-x^3} \end{cases}$

1. Déterminer, de deux manières différentes, l'équation de la tangente à la courbe en  $x = 0$ .

2. Etudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.

### Correction

1. **Première méthode :**

$$f(x) = 1 + x^3 + \mathcal{O}(x^3).$$

On en déduit que l'équation de la tangente en 0 est  $y = 1$ .

**Deuxième méthode :**

L'équation de la tangente est donnée par  $y = f'(0)x + f(0)$ .

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(x) = \frac{-3x^2}{(1-x^3)^2} \text{ donc } f'(0) = 0.$$

Donc, la tangente a pour équation  $y = 1$ .

2. On étudie le signe au voisinage de 0 de  $f(x) - 1$ .

$$\text{Or, } f(x) - 1 = x^3.$$

Le signe de  $x^3$  varie au voisinage de 0. Donc, avant 0, la courbe est en dessous de la tangente.

Après 0, elle est au dessus de la tangente.

### Exercice 6

1. Déterminer un équivalent simple de  $f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$  en  $x = 0$ .

2. Déterminer un équivalent simple de  $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$  en  $x = 0$ .

### Correction

$$1. \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3))}{x \sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)}{x \sin(x)}.$$

$$\text{Donc, } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^2}$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{6}}.$$

$$2. \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} = \frac{(x - \sin(x))(x + \sin(x))}{x^2 \sin^2(x)}.$$

$$\text{Or, } x + \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x + \mathcal{O}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + \mathcal{O}(x). \text{ Donc, } x + \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x.$$

$$\text{Donc, par produit et quotient, } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6} \cdot 2x}{x^4}$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3}}.$$

**Exercice 7** Déterminer le développement limité de  $f(x) = \ln(2 + \sin(x))$  en  $x = 0$  à l'ordre 2.

$$\text{Correction } f(x) = \ln(2 + \sin(x)) = \ln\left(2\left(1 + \frac{\sin(x)}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \text{ où } u(x) = \frac{x}{2} + o(x^2).$$

$$u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2} \text{ donc } o(u^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$$

$$u(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{4} + o(x^3)$$

$$\text{Donc, } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} \boxed{\ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^3)}.$$

**Exercice 8** [\*] Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes.

1.  $x \mapsto \frac{1}{e^x + \cos x}$
2.  $x \mapsto \frac{1}{3 + \sin(x)}$
3.  $x \mapsto \frac{e^x}{\cos x}$

### Correction

1.  $\frac{1}{e^x + \cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{5}{48}x^3 + o(x^3).$
2.  $\frac{1}{3 + \sin x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{27} + \frac{x^3}{162} + o(x^3).$
3.  $\frac{e^x}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$

**Exercice 9** [\*\*] Soit  $f : x \mapsto x^2(e^x - 1) \cos\left(\frac{1}{x}\right).$

1. Montrer que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2).$
2. Montrer que  $f$  ne possède pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.  
*On raisonnera par l'absurde.*

### Correction

1. On va étudier  $\frac{f(x)}{x^2} = (e^x - 1) \cos\left(\frac{1}{x}\right).$   
 $0 \leq \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left| (e^x - 1) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |e^x - 1|.$   
Or,  $\lim_{x \rightarrow 0} |e^x - 1| = 0$  donc, par le théorème d'encadrement,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| (e^x - 1) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0.$   
On en déduit que  $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)}.$
2. On raisonne par l'absurde et on suppose que  $f$  admet en 0 un développement limité à l'ordre 3.  
Donc, il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} ax^3 + o(x^3).$   
Donc,  $\frac{f(x)}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} a + o(1).$  Donc,  $g : x \rightarrow \frac{f(x)}{x^3}$  admet une limite finie en 0.  
On va montrer que c'est absurde.  
Prenons  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{1}{2\pi n}$  et  $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$  Ces deux suites convergent vers 0.  
 $\forall n \in \mathbb{N}, g(x_n) = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \cos(2\pi n) = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}$  et  $g(y_n) = \frac{e^{y_n} - 1}{y_n} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0.$   
Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(y_n) = 0.$   
Donc, il est absurde de supposer que la fonction  $g$  admette une limite finie en 0.  
Donc,  $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'admet pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.}}$