

Exercice 1 — Factorisation de polynômes

1. $P = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$.

Nous remarquons que -1 est racine de P (car $P(-1) = 0$).

Examinons la multiplicité de cette racine : $P' = 4X^3 + 9X^2 + 8X + 3$. On remarque que $P(-1) = -4 + 9 - 8 + 3 = 0$. Donc -1 est racine multiple de P .

Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X + 1)^2 Q$.

On déduit de cette relation que $\deg(P) = \deg[(X + 1)^2] + \deg Q$, d'où $\deg Q = 4 - 2 = 2$.

Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $Q = aX^2 + bX + c$.

Ainsi, $(X + 1)^2 Q = (X^2 + 2X + 1)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + (2a + b)X^3 + (a + 2b + c)X^2 + (b + 2c)X + c$.

$$\text{Donc par identification, } P = (X + 1)^2 Q \iff \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 3 \\ a + 2b + c = 4 \\ b + 2c = 3 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

On en déduit $P = (X + 1)^2(X^2 + X + 1)$.

Il faut maintenant factoriser le trinôme $X^2 + X + 1$ en cherchant ses racines. Son discriminant est strictement négatif. Il admet deux racines complexes conjuguées que l'on peut mettre sous forme trigonométrique : $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. Puisque le coefficient dominant de ce trinôme est 1, on a la factorisation $X^2 + X + 1 = (X - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}})$. On en déduit la factorisation de P en produit de polynômes de

degré 1 :
$$P = (X + 1)^2(X - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}}).$$

2. $Q = 2X^4 - 7X^3 + 9X^2 - 5X + 1$.

On constate que $Q(1) = 0$ et $Q'(1) = 0$. Donc 1 est racine multiple de Q . Donc Q est divisible par $(X - 1)^2$ et le polynôme quotient est de degré 2.

En écrivant $Q = aX^2 + bX + c$, en développant $(X - 1)^2(aX^2 + bX + c)$ et en identifiant les coefficients de ce polynôme avec les coefficients de P , on obtient $P = (X - 1)^2(2X^2 - 3X + 1)$. On s'intéresse ensuite au trinôme $2X^2 - 3X + 1$ qui a pour racines 1 et $\frac{1}{2}$ donc on a la factorisation : $2X^2 - 3X + 1 = 2(X - 1)(X - \frac{1}{2})$ (ne pas oublier le coefficient dominant).

Ainsi :
$$Q = 2(X - 1)^3(X - \frac{1}{2}).$$

Exercice 2 — Géométrie.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1, 1)$ et $B(-2, 3)$.

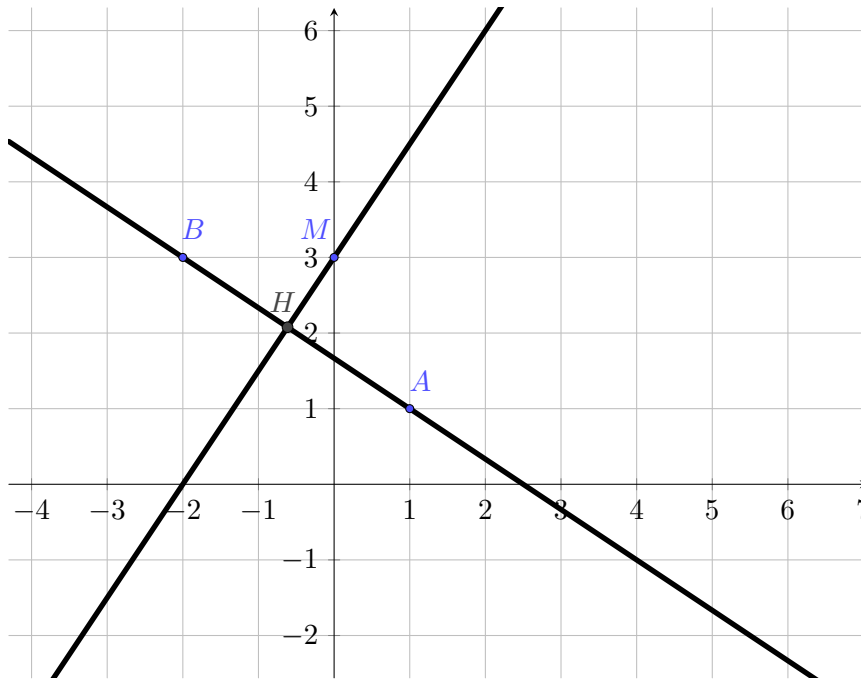
1. Le vecteur $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) . Donc cette droite a une équation cartésienne de la forme $2x + 3y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$ à déterminer. Les coordonnées de A vérifient l'équation car $A \in (AB)$. Donc $2 \times 1 + 3 \times 1 + c = 0$. D'où $c = -5$.

Ainsi,
$$2x + 3y - 5 = 0 \text{ est une équation cartésienne de la droite } (AB).$$

2. Soit $H(x, y)$ un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
 H \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur } (AB) &\iff \begin{cases} \vec{MH} \cdot \vec{AB} = 0 \\ H \in (AB) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -3x + 2(y - 3) = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \vdots \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{-8}{13} \\ y = \frac{27}{13} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le projeté orthogonal de M sur (AB) est le point $H(\frac{-8}{13}, \frac{27}{13})$.



3. La distance de M à la droite (AB) est la distance MH . Or $\vec{MH} \left(\frac{-8}{13}, \frac{-12}{13} \right)$. Donc $MH = \sqrt{\left(\frac{8}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$.

Ainsi, la distance de M à la droite (AB) est de $\frac{4\sqrt{13}}{13}$ unités de longueur.

Exercice 3 – Puissances de matrices.

1. Méthode 1 – Diagonalisation

(a) Puisqu'une matrice est proposée comme matrice inverse, on calcule les deux produits pour vérifier.

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$PB = BP = I_3 \text{ donc } \boxed{P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = B}.$$

$$(b) \quad PA = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Puis, } \boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D est une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

(d) $D = PAP^{-1}$. Donc, $DP = PA$. Donc, $\boxed{P^{-1}DP = A}$.

- (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence : $\mathcal{H}_n$: " $A^n = PD^n P^{-1}$ ".
- $\mathcal{H}_0$ est vraie car $PD^0 P^{-1} = PI_2 P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = D^0$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n A \text{ par définition de la puissance } n+1 \text{ de la matrice } A \\
&= (PD^n P^{-1})(PDP^{-1}) \text{ d'après } \mathcal{H}_n \text{ et la question précédente} \\
&= PD^n (P^{-1}P)DP^{-1} \text{ par associativité du produit matriciel} \\
&= PD^n I_2 DP^{-1} \\
&= PD^{n+1} P^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^n P^{-1}$.

2. Méthode 2 – Par le binôme de Newton.

- (a) Après calculs, $B^2 = -B$.
- (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété de récurrence : $\mathcal{H}_k$: " $B^k = (-1)^{k-1} B$ ".
- $\mathcal{H}_1$ est vraie car $(-1)^0 B = B$.
 - Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
B^{k+1} &= B^k B \text{ par définition de la puissance } k+1 \text{ de la matrice } A \\
&= (-1)^{k-1} B.B \text{ d'après } \mathcal{H}_n \\
&= (-1)^{k-1} B^2 \\
&= (-1)^{k-1} (-B) \text{ par la question précédente} \\
&= (-1)^k B
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = (-1)^{k-1} B$.

- (c) Après calculs, $B + 2I_3 = A$.
- (d) Les matrices B et $2I_3$ commutent. D'après le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
A^n &= (B + 2I_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} \\
&= (2I_3)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} \\
&= 2^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} B 2^{n-k} I_3 \\
&= 2^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} 2^{n-k} \right) B \\
&= 2^n I_3 - \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} \right) B \\
&= 2^n I_3 - \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} - 2^n \right) B \\
&= 2^n I_3 - ((2-1)^n - 2^n) B \\
&= 2^n I_3 - (1 - 2^n) B
\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
A^n &= 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (1 - 2^n) \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 18 & 0 & -9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n - (1 - 2^n)8 & 0 & 4(1 - 2^n) \\ 4(1 - 2^n) & 2^n & -2(1 - 2^n) \\ -18(1 - 2^n) & 0 & 2^n + 9(1 - 2^n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc,
$$A^n = \begin{pmatrix} 9 \times 2^n - 8 & 0 & 4 - 4 \times 2^n \\ 4 - 4 \times 2^n & 2^n & 2 \times 2^n - 2 \\ 18 \times 2^n - 18 & 0 & 9 - 8 \times 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 4 – Suite de polynômes

1. (a) La connaissance de P_0 et P_1 et la relation de récurrence permettent de calculer :

$$P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2,$$

$$P_3 = XP_2 - P_1 = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 3X,$$

$$P_4 = XP_3 - P_2 = X(X^3 - 3X) - (X^2 - 2) = X^4 - 4X^2 + 2,$$

$$P_5 = XP_4 - P_3 = X(X^4 - 4X^2 + 2) - (X^3 - 3X) = X^5 - 5X^3 + 5X.$$

$$\text{D'où : } P_2 = X^2 - 2, P_3 = X^3 - 3X, P_4 = X^4 - 4X^2 + 2, P_5 = X^5 - 5X^3 + 5X.$$

- (b) On peut conjecturer sur le calcul des P_n pour $1 \leq n \leq 5$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est de degré n et que son coefficient dominant est 1 (attention, ceci n'est pas vrai pour $n = 0$).

Nous allons montrer ce résultat par récurrence à deux pas.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété de récurrence

$$\mathcal{Q}_n : " \deg(P_n) = n \text{ et son coefficient dominant est } 1 "$$

Initialisation : On utilise les expressions de P_1 et P_2 .

$P_1 = X$ donc P_1 est de degré 1 et son coefficient dominant est 1. Ainsi, $\mathcal{Q}_1$ est vraie.

$P_2 = X^2 - 2$ donc P_2 est de degré 2 et son coefficient dominant est 2. Ainsi, $\mathcal{Q}_2$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ soient vraies.

Il existe donc Q , polynôme de degré n , tel que $P_{n+1} = X^{n+1} + Q$ (d'après $\mathcal{Q}_{n+1}$).

D'après la définition de la suite de polynômes, $P_{n+2} = X(X^{n+1} + Q) - P_n = X^{n+2} + XQ - P_n$.

XQ est un polynôme de degré $n+1$ et P_n est un polynôme de degré n d'après $\mathcal{Q}_n$. On en déduit que P_{n+2} est de degré $n+2$ et que son coefficient dominant est 1. Donc $\mathcal{Q}_{n+2}$ est vraie.

Conclusion : Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, P_n \text{ est de degré } n \text{ et son coefficient dominant est } 1.$$

- (c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété de récurrence

$$\mathcal{Q}_n : " P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta) "$$

Initialisation : $P_0 = 2$ donc $P_0(2 \cos(\theta)) = 2$. Par ailleurs $2 \cos(0\theta) = 2 \cos(0) = 2$. Donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

$P_1 = X$ donc $P_1(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(\theta)$. Donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ soient vraies.

Par définition de la suite de polynômes, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

Donc $P_{n+2}(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(\theta)P_{n+1}(2 \cos(\theta)) - P_n(2 \cos(\theta))$. On applique $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$, d'où :

$$P_{n+2}(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(\theta)2 \cos((n+1)\theta) - 2 \cos(n\theta).$$

On factorise par 2 et on écrit : $\cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta - \theta) = \cos((n+1)\theta) \cos(\theta) + \sin((n+1)\theta) \sin(\theta)$.

$$\text{D'où } P_{n+2}(2 \cos(\theta)) = 2[2 \cos(\theta) \cos((n+1)\theta) - \cos((n+1)\theta) \cos(\theta) - \sin((n+1)\theta) \sin(\theta)]$$

$$= 2[\cos((n+1)\theta) \cos(\theta) - \sin((n+1)\theta) \sin(\theta)]$$

$$= 2 \cos((n+1)\theta + \theta) \text{ (par une formule de trigonométrie)}$$

$$= 2 \cos((n+2)\theta). \text{ Donc } \mathcal{Q}_{n+2} \text{ est vraie.}$$

Conclusion : Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$.

- (d) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ fixé quelconque.

D'après la question précédente, $P_n(2 \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})) = 2 \cos(n(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}))$.

$$\text{Donc } P_n(2 \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})) = 2 \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, 2 \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}) \text{ est racine de } P_n.$$

- (e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, 0 \leq k \leq n-1$.

Donc $0 \leq 2k\pi \leq 2(n-1)\pi$ (on a multiplié par $2\pi > 0$)

Donc $0 \leq \pi + 2k\pi \leq \pi + 2(n-1)\pi < 2n\pi$

Donc $0 \leq \frac{\pi + 2k\pi}{2n} < \pi$ (on a multiplié par $\frac{1}{2n} > 0$).

Ainsi, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les nombres $\frac{\pi + 2k\pi}{2n}$ appartiennent à l'intervalle $[0, \pi]$.

De plus, soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. $k < k+1$, donc en multipliant par $\frac{\pi}{n} > 0$ puis en ajoutant $\frac{\pi}{2n}$, on obtient $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} < \frac{\pi}{2n} + \frac{(k+1)\pi}{n}$. Donc $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $x_k < x_{k+1}$.

- (f) On a montré que $0 < x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} \leq \pi$. On applique la fonction cosinus, strictement décroissante sur cet intervalle. On en déduit : $\cos(x_0) > \cos(x_1) > \dots > \cos(x_{n-1})$. Puis, en multipliant par $2 > 0$: $2\cos(x_0) > 2\cos(x_1) > \dots > 2\cos(x_{n-1})$.

Donc pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les nombres réels $2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ sont deux à deux distincts.

- (g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons vu à la question précédente que P_n admet n racines deux à deux distinctes qui sont les nombres réels $2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Donc

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \right) \text{ divise } P_n$$

Un calcul sur les degrés nous indique que le polynôme quotient est de degré 0, donc c'est un polynôme constant, noté λ . Par identification, on trouve que λ est le coefficient dominant de P_n . Donc $\lambda = 1$. On en déduit la factorisation suivante :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \right)$$

2. Factorisation de P_5

- (a) Q est un trinôme de discriminant $5 > 0$. Il admet donc deux racines réelles distinctes qui sont $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Son coefficient dominant est 1. On en déduit la factorisation suivante :

$$Q = \left(X - \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right) \left(X - \frac{5-\sqrt{5}}{2} \right).$$

On remarque ensuite que $P_5 = XQ(X^2)$. Donc $P_5 = X \left(X^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right) \left(X^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Or les réels $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ sont strictement positifs. On en déduit :

$$P_5 = X \left(X - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \right) \left(X + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \right) \left(X - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \right) \left(X + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \right)$$

- (b) Nous pouvons classer les 5 racines de P_5 obtenues à la question précédente dans l'ordre croissant : $-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} < -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} < 0 < \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} < \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Or à la question ??, nous avons vu que les racines de P_5 étaient les nombres suivants, rangés dans l'ordre croissant : $2\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) < 2\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) < 2\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) < 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) < 2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

On en déduit : $2\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ et $2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. D'où :

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \text{ et } \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$