



1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°5

Samedi 24 janvier 2026

– Matrices - Polynômes - Géométrie –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter. **Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.** N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1 – Factorisation de polynômes.

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}[X]$ (les écrire comme produits de polynômes de degré 1). On pourra commencer par chercher des racines évidentes et se demander si ces racines sont multiples.

1. $P = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$
2. $Q = 2X^4 - 7X^3 + 9X^2 - 5X + 1$

Exercice 2 – Géométrie.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1, 1)$ et $B(-2, 3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Soit le point $M(0, 3)$. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de M sur la droite (AB). On fera un dessin en prenant $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de norme 2 cm ou 2 grands carreaux (si copie à grands carreaux).
3. En déduire la distance de M à la droite (AB).

Exercice 3 – Puissances de matrices.

Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 18 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. L'objectif de l'exercice est de déterminer les puissances de la matrice A par deux méthodes différentes.

1. Méthode 1 – Diagonalisation

$$\text{Soit } P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(a) \text{ Montrer que } P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) On note $D = PAP^{-1}$. Calculer D.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer D^n en fonction de n . **Aucune justification n'est attendue.**

(d) Montrer que $A = P^{-1}DP$.

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$, proposer une formule pour A^n en fonction de n , D, P et P^{-1} .
Vous démontrerez ensuite cette formule par récurrence.

2. Méthode 2 – Par le binôme de Newton.

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 18 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer B^2 .

- (b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, B^k = (-1)^{k-1}B$.
 - (c) Calculer $B + 2I_3$.
 - (d) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une formule pour A^n sous forme de somme en fonction de n et de B .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la méthode de votre choix, donner la matrice A^n sous forme de tableau.

Exercice 4 – Une suite de polynômes

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes à coefficients réels définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 2 \\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1.
 - (a) Déterminer les polynômes P_2, P_3, P_4 et P_5 . On apporter un soin particulier à ces calculs car certains résultats doivent être utilisés dans la suite.
 - (b) Conjecturer le degré et le coefficient dominant de P_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer ce résultat par récurrence.
 - (c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$.
 - (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ est racine de P_n .
 - (e) Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose $x_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$. Montrer que les x_k ainsi définis appartiennent à $[0, \pi]$ et qu'ils vérifient : $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, x_k < x_{k+1}$.
 - (f) En déduire que pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les nombres $2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ sont deux à deux distincts.
 - (g) En déduire une factorisation de P_n en produit de polynômes de degré 1.
2. **Factorisation de P_5**
 - (a) On pose $Q = X^2 - 5X + 5$. Factoriser Q . En déduire une factorisation de P_5 en produit de polynômes de degré 1 (on pourra commencer par exprimer P_5 à l'aide du polynôme Q).
 - (b) En comparant les résultats des questions (1g) et (2a), déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{10}$ et $\cos \frac{3\pi}{10}$.