

Partie A

1. On calcule les premières puissances de la matrice A : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 4 \\ 9 & 13 & 5 \\ 9 & 14 & 4 \end{pmatrix}$.

On vérifie alors aisément que $A^3 = 2A^2 + 3A$.

2. On raisonne ici par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{H}_n$: « il existe deux réels, notés u_n et v_n , tels que $A^n = u_n A^2 + v_n A$ ».

— Initialisation : $A^1 = 0A^2 + 1A$ donc $\mathcal{H}_1$ est vérifiée avec $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$ (on peut remarquer que $A^2 = 1A^2 + 0A$ et $A^3 = 2A^2 + 3A$ donc $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ sont donc vraies avec $u_2 = 1, v_2 = 0, u_3 = 2$ et $v_3 = 3$).

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose $\mathcal{H}_n$ vérifiée. Calculons A^{n+1} :

$$A^{n+1} = AA^n = A(u_n A^2 + v_n A) = u_n A^3 + v_n A^2 = u_n (2A^2 + 3A) + v_n A^2 = (2u_n + v_n)A^2 + (3u_n)A.$$

Ainsi, en posant $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 3u_n$, on a bien prouvé l'existence des deux réels recherchés. Donc, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A^2 + v_n A$.

De plus, ces réels vérifient, pour tout entier n non nul, les relations $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n. \end{cases}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 2u_{n+1} + 3u_n \\ v_{n+2} = 3u_{n+1} = 3(2u_n + v_n) = 2(3u_n) + 3v_n = 2v_{n+1} + 3v_n. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$.

4. On reconnaît ici l'expression de deux suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Pour exprimer leur terme général, on introduit l'équation caractéristique (qui est la même pour les deux suites) : $x^2 - 2x - 3 = 0$. Les solutions (évidentes) de cette équation sont 3 et -1 . Les suites (u_n) et (v_n) vont donc pouvoir s'écrire sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \alpha 3^n + \beta (-1)^n \text{ et } v_n = \gamma 3^n + \delta (-1)^n,$$

où α, β, γ et δ sont des constantes réelles que l'on va déterminer à l'aide des conditions initiales.

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 0 \\ 9\alpha + \beta = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{1}{12} \\ \beta = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3\gamma - \delta = 1 \\ 9\gamma + \delta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma = \frac{1}{12} \\ \delta = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_n = \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{4} \\ v_n = \frac{3^{n-1} - 3(-1)^n}{4}. \end{cases}$$

5. En revenant à l'expression de A^n en fonction de A, A^2, u_n et v_n , on trouve alors, après simplification :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n-1} & (3^n - (-1)^n) & (3^{n-1} + (-1)^n) \\ 2 \cdot 3^{n-1} & (3^n + (-1)^n) & (3^{n-1} - (-1)^n) \\ 2 \cdot 3^{n-1} & (3^n - (-1)^n) & (3^{n-1} + (-1)^n) \end{pmatrix}.$$

Partie B

1. «Le lion mange deux gazelles les deux premiers jours» se traduit en terme d'événements par $G_1 \cap G_2$. De plus, on sait que ces deux événements sont indépendants. D'où $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)P(G_2) = \frac{4}{9}$.

La probabilité que le lion mange deux gazelles les deux premiers jours vaut donc $\frac{4}{9}$.

«Le lion mange un zèbre, puis deux gazelles lors des trois premiers jours» se traduit en terme d'événements par $Z_1 \cap G_2 \cap G_3$. Par indépendance, la probabilité recherchée vaut $\frac{4}{27}$.

2. Il y a deux menus possibles pour le lion pour réaliser l'évènement E_3 :

$$E_3 = (G_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4) \cup (Z_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4).$$

Comme cette union est disjointe, on a $P(E_3) = P(G_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4) + P(Z_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4)$, et toujours avec l'indépendance, on trouve

$$P(E_3) = \frac{8}{81} + \frac{4}{81} = \frac{4}{27}.$$

3. (a) p_1 et p_2 sont les probabilités calculées dans la première question ; $p_1 = \frac{4}{9}$ et $p_2 = \frac{4}{27}$.
- (b) Il y a deux points à vérifier pour s'assurer que la famille forme un système complet d'événements :
- Les événements sont deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned} (G_1 \cap G_2) \cap (G_1 \cap Z_2) &= G_1 \cap (G_2 \cap Z_2) = \emptyset && \text{car } G_2 \text{ et } Z_2 \text{ sont incompatibles,} \\ (G_1 \cap G_2) \cap Z_1 &= (G_1 \cap Z_1) \cap G_2 = \emptyset && \text{car } G_1 \text{ et } Z_1 \text{ sont incompatibles,} \\ (G_1 \cap Z_2) \cap Z_1 &= (G_1 \cap Z_1) \cap Z_2 = \emptyset && \text{pour la même raison.} \end{aligned}$$

— La famille recouvre l'univers :

$$(G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap Z_2) \cup Z_1 = (G_1 \cap (G_2 \cup Z_2)) \cup Z_1 = (G_1 \cap \Omega) \cup Z_1 = G_1 \cup Z_1 = \Omega.$$

La famille $(G_1 \cap G_2, G_1 \cap Z_2, Z_1)$ forme bien un système complet d'événements.

- (c) Si G_1 et Z_2 sont réalisés, alors au troisième jour, c'est comme si on remettait les compteurs à zéro et il reste alors n jours à étudier. Donc $P_{G_1 \cap Z_2}(E_{n+2}) = P(E_n)$.
De même, si Z_1 est réalisé, on remet les compteurs à zéro dès le second jour. D'où, $P_{Z_1}(E_{n+2}) = P(E_{n+1})$.
Si G_1 et G_2 sont réalisés, la première fois que le lion mange de la gazelle deux jours consécutifs a lieu lors des deux premiers jours et non pas lors des jours n et $(n+1)$ donc $P_{G_1 \cap G_2}(E_{n+2}) = 0$.
- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit la formule des probabilités totales avec ce système complet d'événements :

$$p_{n+2} = P(E_{n+2}) = P_{G_1 \cap G_2}(E_{n+2})P(G_1 \cap G_2) + P_{G_1 \cap Z_2}(E_{n+2})P(G_1 \cap Z_2) + P_{Z_1}(E_{n+2})P(Z_1).$$

Donc

$$p_{n+2} = P_{G_1 \cap Z_2}(E_{n+2})P(G_1 \cap Z_2) + P_{Z_1}(E_{n+2})P(Z_1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= P(E_n)P(G_1 \cap Z_2) + P(E_{n+1})P(Z_1) \\ &= \frac{2}{9}p_n + \frac{1}{3}p_{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$.

4. On reconnaît dans l'expression de p_n une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $9x^2 - 3x - 2 = 0$. Son discriminant vaut 9^2 et ses racines sont donc $x_1 = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{2}{3}$. La forme générale de la suite (p_n) est donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \alpha \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \beta \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

où α et β sont deux constantes réelles que l'on va déterminer à l'aide des conditions initiales.

$$\begin{cases} p_1 = \frac{4}{9} \\ p_2 = \frac{4}{27} \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha + 2\beta = \frac{4}{3} \\ \alpha + 4\beta = \frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{-4}{9} \\ \beta = \frac{4}{9} \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{4((-1)^{n+1} + 2^n)}{3^{n+2}}}.$$

Partie C

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements G_n , Z_n et R_n forment un système complet d'événements. Avec ce système, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(G_{n+1}) &= P_{G_n}(G_{n+1})P(G_n) + P_{Z_n}(G_{n+1})P(Z_n) + P_{R_n}(G_{n+1})P(R_n) \\ &= \frac{1}{3}P(G_n) + \frac{1}{3}P(Z_n) + \frac{1}{3}P(R_n); \\ P(Z_{n+1}) &= P_{G_n}(Z_{n+1})P(G_n) + P_{Z_n}(Z_{n+1})P(Z_n) + P_{R_n}(Z_{n+1})P(R_n) \\ &= \frac{2}{3}P(G_n) + \frac{1}{3}P(Z_n) + \frac{2}{3}P(R_n); \\ P(R_{n+1}) &= P_{G_n}(R_{n+1})P(G_n) + P_{Z_n}(R_{n+1})P(Z_n) + P_{R_n}(R_{n+1})P(R_n) \\ &= 0 \cdot P(G_n) + \frac{1}{3}P(Z_n) + 0 \cdot P(R_n). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} P(G_{n+1}) \\ P(Z_{n+1}) \\ P(R_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}P(G_n) + \frac{1}{3}P(Z_n) + \frac{1}{3}P(R_n) \\ \frac{2}{3}P(G_n) + \frac{1}{3}P(Z_n) + \frac{2}{3}P(R_n) \\ 0 \cdot P(G_n) + \frac{1}{3}P(Z_n) + 0 \cdot P(R_n) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(G_n) \\ P(Z_n) \\ P(R_n) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{En posant } M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, X_{n+1} = MX_n.}$$

2. Par récurrence, on démontre que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, X_n = M^{n-1}X_1 = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}.$

$$\text{Et en remarquant que } M = \frac{1}{3} {}^t A, \text{ on trouve, } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, X_n = \frac{1}{3^{n-1}} {}^t (A^{n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'expression de la partie I, on trouve : $X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3}(-1)^n}{2 \cdot 3^{n-1}} \\ \frac{1}{6} + \frac{(-1)^n}{2 \cdot 3^{n-1}} \end{pmatrix}.$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\text{la probabilité que la lionne ne ramène rien le } n^{\text{ieme}} \text{ jour vaut } \frac{1}{6} + \frac{(-1)^n}{2 \cdot 3^{n-1}}.}$$