

Problème 2 - Matrices et Probabilités

Les parties I et III sont dépendantes l'une de l'autre. La partie II est indépendante de I et de III.

PARTIE I - Puissances d'une matrice

Soit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^3 = 2A^2 + 3A$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des nombres réels u_n et v_n tels que : $A^n = u_n A^2 + v_n A$.
3. Justifier que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$.
4. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Déterminer enfin, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, A^n en fonction de n , A^2 et A .
En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n-1} & (3^n - (-1)^n) & (3^{n-1} + (-1)^n) \\ 2 \cdot 3^{n-1} & (3^n + (-1)^n) & (3^{n-1} - (-1)^n) \\ 2 \cdot 3^{n-1} & (3^n - (-1)^n) & (3^{n-1} + (-1)^n) \end{pmatrix}.$$

PARTIE II - Lionnes, zèbres et gazelles

Les lionnes chassent des gazelles et des zèbres. Chaque jour, elles rapportent au lion soit une gazelle avec probabilité $\frac{2}{3}$, soit un zèbre avec probabilité $\frac{1}{3}$. On suppose dans cette partie que les menus sont globalement indépendants.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements :

- G_n : « La lionne rapporte une gazelle le $n^{ième}$ jour » ;
- Z_n : « La lionne rapporte un zèbre le $n^{ième}$ jour ».

1. Quelle est la probabilité que le lion ait mangé deux gazelles lors des deux premiers jours ? Quelle est la probabilité que le lion ait mangé un zèbre puis deux gazelles lors des trois premiers jours ?
2. On considère l'événement : E_3 : « Le lion a mangé une gazelle deux fois de suite pour la première fois lors des troisième et quatrième jours ».

Écrire E_3 à l'aide des événements G_n et Z_n définis précédemment. En déduire sa probabilité $P(E_3)$.

3. Pour tout entier naturel n non-nul, on définit l'événement : E_n : « Le lion a mangé pour la première fois deux gazelles consécutives les $n^{ième}$ et $n+1^{ième}$ jours. » et on note $p_n = P(E_n)$ sa probabilité.
 - (a) Déterminer p_1 et p_2 .
 - (b) Justifier que les événements $G_1 \cap G_2$, $G_1 \cap Z_2$, Z_1 forment un système complet.
 - (c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{Z_1}(E_{n+2}) = P(E_{n+1})$ et $P_{G_1 \cap Z_2}(E_{n+2}) = P(E_n)$; que vaut $P_{G_1 \cap G_2}(E_{n+2})$?
 - (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$.
4. Déterminer p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE III - Lionnes, zèbres et gazelles - version 2

On suppose maintenant que les menus ne sont plus indépendants. Plus précisément :

- Si un jour la lionne rapporte une gazelle, alors le lendemain, elle rapporte soit une gazelle avec probabilité $\frac{1}{3}$, soit un zèbre avec probabilité $\frac{2}{3}$.
- Si un jour la lionne rapporte un zèbre, alors le lendemain, elle rapporte soit une gazelle avec probabilité $\frac{1}{3}$, soit un zèbre avec probabilité $\frac{1}{3}$, soit rien du tout avec probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si un jour la lionne ne rapporte rien, alors le lendemain, elle rapporte soit une gazelle avec probabilité $\frac{1}{3}$, soit un zèbre avec probabilité $\frac{2}{3}$.
- Le premier jour, la lionne rapporte une gazelle.

On conserve les notations de la partie précédente, et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement :

R_n : « La lionne ne rapporte rien le $n^{ième}$ jour ».

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n = \begin{pmatrix} P(G_n) \\ P(Z_n) \\ P(R_n) \end{pmatrix}.$$

1. Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Exprimer $P(G_{n+1})$, $P(Z_{n+1})$ et $P(R_{n+1})$ en fonction de $P(G_n)$, $P(Z_n)$ et $P(R_n)$ (on pourra appliquer la formule des probabilités totales). En déduire une matrice M telle que pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, $X_{n+1} = MX_n$.
On admet que cette égalité reste vraie pour $n = 1$ (elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de M et n , puis en fonction de A (matrice de la partie I) et n .
3. En utilisant les résultats de la partie I, déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que la lionne ne rapporte rien le $n^{ième}$ jour.