

# Chapitre 20 : Probabilités sur un univers fini (prof)

## Table des matières

|          |                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Univers et événements liés à une expérience aléatoire</b> | <b>2</b>  |
| 1.1      | Expériences aléatoires et univers . . . . .                  | 2         |
| 1.2      | Événements . . . . .                                         | 2         |
| <b>2</b> | <b>Espaces probabilisés</b>                                  | <b>3</b>  |
| 2.1      | Probabilités et premier exemple . . . . .                    | 3         |
| 2.2      | Règles de calculs . . . . .                                  | 4         |
| 2.3      | Formule des probabilités totales . . . . .                   | 4         |
| <b>3</b> | <b>Probabilité conditionnelle</b>                            | <b>5</b>  |
| 3.1      | Définition . . . . .                                         | 5         |
| 3.2      | Complément sur l'arbre de probabilité . . . . .              | 6         |
| 3.3      | Retour sur la formule des probabilités totales . . . . .     | 6         |
| 3.4      | Formule des probabilités composées . . . . .                 | 7         |
| 3.5      | Formules de Bayes . . . . .                                  | 7         |
| <b>4</b> | <b>Événements indépendants</b>                               | <b>8</b>  |
| 4.1      | Définition . . . . .                                         | 8         |
| 4.2      | Propriétés . . . . .                                         | 8         |
| 4.3      | Pour une famille finie d'événements . . . . .                | 9         |
| <b>5</b> | <b>Existence de probabilités</b>                             | <b>10</b> |

# 1 Univers et événements liés à une expérience aléatoire

## 1.1 Expériences aléatoires et univers

### Définition 1.

On appelle expérience aléatoire toute expérience physique ou de pensée dont le résultat peut varier lorsqu'on la répète.

On appelle univers d'une expérience aléatoire, noté  $\Omega$ , l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience. On parle aussi d'issues ou de réalisations de l'expérience.

### Exemple 2.

- On lance un dé à 6 faces et on note le nombre obtenu. Il y a 6 issues possibles et  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- On choisit au hasard un nombre entre 1 et 100. Il y a 100 issues possibles et  $\Omega = \llbracket 1, 100 \rrbracket$ .
- On pioche deux boules successivement dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires. Il y a 4 issues possibles et  $\Omega = \{BB, BN, NB, NN\} = \{B, N\}^2$ .
- On lance quatre fois une pièce de monnaie.  $\Omega = \{P, F\}^4$ .
- Une urne contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire successivement 5 jetons de l'urne. Quel est l'univers à considérer dans le cas :
  - d'un tirage sans remise ?  $\Omega$  est l'ensemble des 5-listes sans répétition de  $\llbracket 1, 20 \rrbracket$ .
  - d'un tirage avec remise ?  $\Omega$  est l'ensemble des 5-listes (avec répétition possible) de  $\llbracket 1, 20 \rrbracket$ .

**Remarque 3.** On travaillera avec des univers finis donc pas de lancers de dés répétés indéfiniment par exemple.

## 1.2 Événements

### Définition 4.

Soit  $\Omega$  l'univers lié à une expérience aléatoire.

- On appelle événement toute partie de l'univers  $\Omega$ .
- On appelle événement élémentaire tout singleton compris dans l'univers  $\Omega$ .
- On appelle événement certain l'événement  $\Omega$ .
- On appelle événement impossible l'événement  $\emptyset$ .

**Exemple 5.** Lorsqu'on lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6,  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$  et l'événement « obtenir un résultat pair » se notera également  $\{2, 4, 6\}$ .

### Définition 6.

Soit  $\Omega$  l'univers lié à une expérience aléatoire. Soient  $A$  et  $B$  deux événements.

- On appelle événement contraire de  $A$  l'événement  $\bar{A} = \mathcal{C}_\Omega(A)$ .
- On appelle événement  $A$  et  $B$  l'événement  $A \cap B$ .
- On appelle événement  $A$  ou  $B$  l'événement  $A \cup B$ .
- On dit que  $A$  et  $B$  sont incompatibles lorsque  $A \cap B = \emptyset$ .

**Exemple 7.** Pour un événement  $A$ , les événements  $A$  et  $\bar{A}$  sont toujours incompatibles.

**Définition 8.**

Soit  $\Omega$  l'univers lié à une expérience aléatoire. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  une famille finie d'événements.

On dit que la famille forme un système complet d'événement (SCE) lorsque

- leur union forme l'univers tout entier :  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$ .
- ils sont incompatibles deux à deux :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ .

**Exemple 9.**

- Lorsqu'on lance un dé à 6 faces, les événements « le résultat est pair » et « le résultat est impairs » forment un SCE.
- Plus généralement, pour tout événement  $A$ ,  $(A, \bar{A})$  forme un système complet d'événement.
- Pour  $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$ , la famille  $(\{w_i\}, i \in \llbracket 1, n \rrbracket)$  forme un système complet d'événement.

**Exemple 10.** On lance deux fois une pièce de monnaie. Proposer un système complet d'événement.  $(FF, FP, PF, PP)$  est un système complet d'événements.

## 2 Espaces probabilisés

### 2.1 Probabilités et premier exemple

**Définition 11.**

Soit  $\Omega$  un univers fini. On appelle probabilité sur  $\Omega$  toute application  $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  ayant les propriétés suivantes :

- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) \in [0, 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . (additivité)

Le couple  $(\Omega, P)$  est appelé espace probabilisé fini.

Pour  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , le réel  $P(A)$  est appelé probabilité de l'événement  $A$ .

**Théorème 12.**

Soit  $\Omega$  un univers fini non vide.

La fonction  $P : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \end{cases}$  est une probabilité sur  $\Omega$ .

**Définition 13.**

Soit  $\Omega$  un univers fini.

La probabilité précédente est appelée probabilité uniforme sur  $\Omega$ .

**Remarque 14.** On munit l'univers de la probabilité uniforme dans les cas suivants :

- lancer d'un dé non pipé,
- Lancer d'une pièce équilibrée,
- Tirage au hasard d'un jeton dans une urne contenant  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ .

**Exemple 15.** On lance 5 fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois pile ?

**Remarque 16.** Lorsque l'on travaille avec la probabilité uniforme sur  $\Omega$ , le calcul de probabilité se ramène à du dénombrement (pour déterminer des cardinaux).

## 2.2 Règles de calculs

### Théorème 17.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

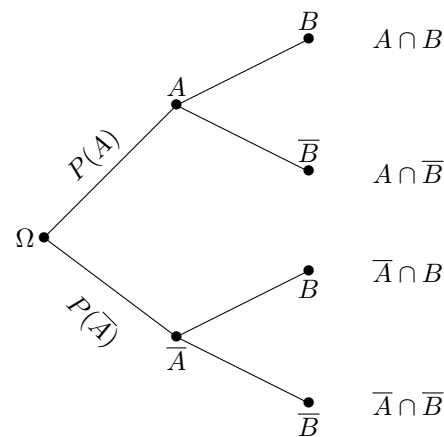
1.  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
2.  $P(\emptyset) = 0$ .
3.  $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ .
4.  $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
5. Pour  $A_1, \dots, A_n$  des événements deux à deux incompatibles,  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .
6. Pour  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événement,  $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$ .

## 2.3 Formule des probabilités totales

On peut représenter une situation aléatoire par un arbre de probabilité.

- On part de l'événement certain  $\Omega$ .
- A partir d'un sommet, on représente un SCE.  
La somme des probabilités au départ de chaque sommet vaut 1.
- Pour deux événements  $A$  et  $B$ ,

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B).$$



### Théorème 18.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $A \subset \Omega$ .

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

**Exemple 19.** On considère deux urnes.

La première urne  $A$  contient 2 jetons blancs et 2 jetons rouges.

La deuxième urne  $B$  contient 7 jetons blancs et 1 jeton rouge.

On choisit au hasard une des deux urnes et on tire au hasard un jeton dans cette urne.

Exprimer la probabilité que le jeton soit blanc.

On note  $U_A$  l'événement "on choisit l'urne  $A$ ". On note  $U_B$  l'événement "on choisit l'urne  $B$ ".

On note  $S$  l'événement "on pioche un jeton blanc".

Les événements  $(U_A, U_B)$  forment un système complet d'événements. Donc, par la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(S \cap U_A) + P(S \cap U_B)$$

#### **Théorème 20.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements.

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

## 3 Probabilité conditionnelle

### 3.1 Définition

#### **Théorème 21.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $P(B) > 0$ .

La fonction  $P_B : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{cases}$  est une probabilité sur  $\Omega$ .

#### **Définition 22.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $P(B) > 0$ .

La fonction  $P_B$  définie précédemment est appelée probabilité conditionnelle sachant  $B$ .

Pour  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , on note  $P_B(A)$  ou  $P(A|B)$ .

**Remarque 23.** La notation  $P_B$  définit une probabilité qui dépend de  $B$  et de  $P$ .

**Exemple 24.** On s'intéresse à une famille de deux enfants avec une équiprobabilité pour le sexe des enfants.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux filles ?

4 issues équiprobables GF, FF, GG, FG donc  $P(FF) = \frac{1}{4}$ .

2. Quelle est la probabilité d'avoir deux filles sachant que l'aîné est une fille ?

$$P(FF|F\bullet) = \frac{P(FF \cap F\bullet)}{P(F\bullet)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

3. Quelle est la probabilité d'avoir deux filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

On appelle  $A$  l'événement "au moins une fille". On a  $P(A) = \frac{3}{4}$ .

$$P(FF|A) = \frac{P(FF \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

**Théorème 25.**

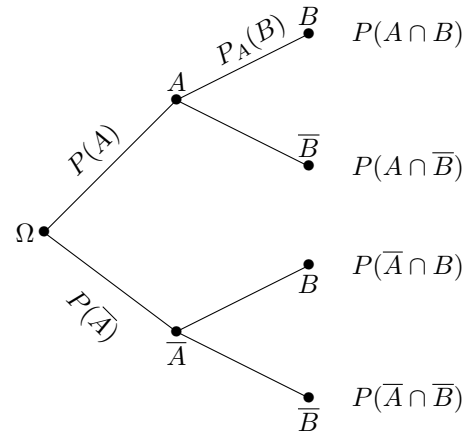
Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $A$  et  $B$  deux événements avec  $P(A) > 0$  et  $P(B) > 0$ .

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

**3.2 Complément sur l'arbre de probabilité**

On peut représenter une situation aléatoire par un arbre de probabilité.

- On part de l'événement certain  $\Omega$ .
- A partir d'un sommet, on représente un SCE.  
La somme des probabilités au départ de chaque sommet vaut 1.
- Sur la branche reliant  $A$  à  $B$ , on représente la probabilité conditionnelle  $P_A(B)$ .
- La probabilité d'un chemin complet s'obtient par le produit des probabilités de chaque branche du chemin.



$$P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$$

**3.3 Retour sur la formule des probabilités totales****Théorème 26.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $(A, \bar{A})$  un système complet d'événements avec  $P(A) > 0$  et  $P(\bar{A}) > 0$ .

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

**Exemple 27.** On considère deux urnes.

La première urne  $A$  contient 2 jetons blancs et 2 jetons rouges.

La deuxième urne  $B$  contient 7 jetons blancs et 1 jeton rouge.

On choisit au hasard une des deux urnes et on tire au hasard un jeton dans cette urne.

Quelle est la probabilité que ce jeton soit blanc ?

On note  $U_A$  l'événement "on choisit l'urne  $A$ ". On note  $U_B$  l'événement "on choisit l'urne  $B$ ".

On note  $S$  l'événement "on pioche un jeton blanc".

Les événements  $(U_A, U_B)$  forment un système complet d'événements. Donc, par la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(S|U_A)P(U_A) + P(S|U_B)P(U_B) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{16}$$

**Théorème 28.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ .

Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(A_i) > 0$ . Alors,

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$

**Remarque 29.** On utilise la formule des probabilités totales quand l'expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes, que chaque étape conditionne le résultat de la suivante, et que l'on cherche la probabilité d'être dans un état donné à l'issue de plusieurs étapes.

**Exemple 30.** On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires.

On effectue 3 tirages successifs sans remise dans cette urne. On travaille avec la probabilité uniforme.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au troisième tirage.

On note  $B_i$  l'événement "tirer une boule blanche au  $i$ -ème tirage".

On note  $N_i$  l'événement "tirer une boule noire au  $i$ -ème tirage".

1. Les événements  $(B_1, N_1)$  forment un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales,

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

2. Les événements  $(B_1 \cap B_2, B_1 \cap N_2, N_1 \cap B_2, N_1 \cap N_2)$  forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B_3) &= P(B_3|B_1 \cap B_2)P(B_1 \cap B_2) + P(B_3|B_1 \cap N_2)P(B_1 \cap N_2) \\ &+ P(B_3|N_1 \cap B_2)P(N_1 \cap B_2) + P(B_3|N_1 \cap N_2)P(N_1 \cap N_2) \\ &= P(B_3|B_1 \cap B_2)P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_3|B_1 \cap N_2)P(N_2|B_1)P(B_1) \\ &+ P(B_3|N_1 \cap B_2)P(B_2|N_1)P(N_1) + P(B_3|N_1 \cap N_2)P(N_2|N_1)P(N_1) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} \\ &= \frac{24 + 36 + 36 + 6}{210} = \frac{102}{210} = \frac{17}{35} \end{aligned}$$

### 3.4 Formule des probabilités composées

#### Théorème 31.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  une famille d'événements telle que  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ . Alors,

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

**Exemple 32.** On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On effectue 3 tirages successifs sans remise dans cette urne.

Calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches puis une boule noire.

$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(N_3|B_1 \cap B_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$

### 3.5 Formules de Bayes

#### Théorème 33.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$  tels que  $P(A) > 0$  et  $P(B) > 0$ .

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

**Exemple 34.** On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On effectue 3 tirages successifs sans remise dans cette urne.

Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage sachant que la deuxième boule obtenue est noire.

$$P(B_1|N_2) = \frac{P(N_2|B_1)P(B_1)}{P(N_2)} = \frac{P(N_2|B_1)P(B_1)}{P(N_2|B_1)P(B_1) + P(N_2|N_1)P(N_1)} = \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7}} = \frac{2}{3}$$

**Remarque 35.** La formule de Bayes s'utilise pour "remonter aux causes".

Connaissant le résultat final d'une expérience aléatoire, elle donne la probabilité d'avoir été dans une certaine situation antérieurement.

#### Théorème 36.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(A_i) > 0$ . Soit  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $P(B) > 0$ .

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

## 4 Événements indépendants

### 4.1 Définition

#### Définition 37.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ .

On dit que  $A$  et  $B$  sont des événements indépendants lorsque  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

**Remarque 38.**

- L'indépendance dépend de la probabilité  $P$  utilisée sur  $\Omega$ .
- A ne pas confondre avec événements incompatibles.

### 4.2 Propriétés

#### Théorème 39.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$  deux événements indépendants.

1.  $A$  et  $\overline{B}$  sont indépendants.
2.  $\overline{A}$  et  $B$  sont indépendants.
3.  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  sont indépendants.

#### Théorème 40.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ .

1. Si  $P(B) = 0$  alors  $A$  et  $B$  sont indépendants.
2. Si  $P(B) > 0$  alors  $A$  et  $B$  sont indépendants si, et seulement si,  $P_B(A) = P(A)$ .

**Exemple 41.** On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit les événements suivants :

$A$  : "On obtient un chiffre pair"

$B$  : "On obtient un chiffre supérieur ou égal à 2"

$C$  : "On obtient un chiffre supérieur ou égal à 3".

1. Quel est l'univers  $\Omega$  à considérer ? Quelle probabilité met-on sur  $\Omega$  ?  
 $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$  et on travaille avec la probabilité uniforme.
2. Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? Les événements  $A$  et  $C$  sont-ils indépendants ?  
 $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{5}{6}$  et donc  $P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{12}$ .  
 $P(A \cap B) = \frac{3}{6}$  donc  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ . Donc,  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants.  
 $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$  et donc  $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{3}$ .  
 $P(A \cap C) = \frac{3}{6}$  donc  $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ . Donc,  $A$  et  $C$  sont indépendants.

### 4.3 Pour une famille finie d'événements

#### Définition 42.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ .

On dit que les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont deux à deux indépendants lorsque

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

#### Définition 43.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ .

On dit que les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont mutuellement indépendants lorsque

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

**Exemple 44.** Soient  $A_1, A_2$  et  $A_3$  trois événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, P)$ .

- ils sont indépendants deux à deux lorsque

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2), \quad P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3), \quad \text{et} \quad P(A_3 \cap A_1) = P(A_3)P(A_1).$$

- ils sont mutuellement indépendants lorsque

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2), \quad P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3), \quad P(A_3 \cap A_1) = P(A_3)P(A_1) \text{ et} \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3). \end{aligned}$$

#### Théorème 45.

1. L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.
2. La réciproque est fausse lorsqu'il y a plus de 3 événements.

**Exemple 46.** On lance deux fois une pièce équilibrée. On définit les événements :

$A_1$  : "le premier lancer donne pile"

$A_2$  : "l'un des deux lancers donne pile, l'autre donne face"

$A_3$  : "Le deuxième lancer donne face".

Montrer que  $A_1, A_2, A_3$  sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2) \text{ donc } A_1 \text{ et } A_2 \text{ sont indépendants.}$$

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_3) = \frac{1}{2}.$$

$$P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3) \text{ donc } A_1 \text{ et } A_3 \text{ sont indépendants.}$$

$$P(A_3) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

$$P(A_3 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_3)P(A_2) \text{ donc } A_3 \text{ et } A_2 \text{ sont indépendants.}$$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$  et  $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8} \neq P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$  donc les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

## 5 Existence de probabilités

### Théorème 47.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini.

1. Soit  $A = \{w_1, \dots, w_p\} \subset \Omega$ .  $P(A) = \sum_{k=1}^p P(\{w_k\})$ .
2.  $\sum_{w \in \Omega} P(\{w\}) = 1$ .

**Remarque 48.** Une probabilité est entièrement définie par les probabilités des événements élémentaires  $(P(\{w\}))_{w \in \Omega}$ .

### Théorème 49.

Soit  $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$  un univers fini. Soit  $(p_1, \dots, p_n) \in [0; 1]^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

Il existe une unique probabilité  $P$  sur  $\Omega$  telle que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(\{w_i\}) = p_i$ .

Cette probabilité est donnée par  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ w_i \in A}} p_i$ .