

Chapitre 19 : Développements limités

(prof)

Table des matières

1	Fonction négligeable devant une autre.	2
1.1	Définition	2
1.2	Caractérisation	2
1.3	Premiers développements limités	3
1.4	Propriétés des $\mathcal{O}()$	3
2	Développements limités en 0	4
2.1	Définitions et premiers exemples	4
2.2	Développements limités obtenus par substitution	5
2.3	Développements limités obtenus par primitivation	6
2.4	Développements limités obtenus par opérations sur des développements limités usuels	7
2.5	Développements limités obtenus par la formule de Taylor-Young	8
2.6	Développements limités obtenus par composition à droite	9
3	Propriétés des développements limités	10
3.1	Unicité du développement limité	10
3.2	Calculs de limites et d'équivalents	10
3.3	Etude locale de fonction	10
4	Formulaire de développements limités usuels en 0	12

1 Fonction négligeable devant une autre.

1.1 Définition

Définition 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit que $f(x)$ est négligeable devant x^n au voisinage de 0 lorsque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.

On note $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$.

Définition 2.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non majoré. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit que $f(x)$ est négligeable devant x^n au voisinage de $+\infty$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.

On note $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x^n)$.

Exemple 3.

- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$ donc $\cos(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x)$
- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^4} = 0$ donc $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x^4)$
- On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2} = 0$ donc $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^2)$

Théorème 4 (Croissances comparées).

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x)$.
2. $(\ln(x))^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x^\beta)$.

1.2 Caractérisation

Théorème 5.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a équivalence entre :

1. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$,
2. Il existe une fonction ε telle que $f(x) = x^n \varepsilon(x)$ au voisinage de 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Théorème 6.

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixés.

1. $x^{n+p} \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$
2. $x^n \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x^{n+p})$.

Démonstration :

- $x^{n+p} = x^n \cdot x^p$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0$ donc $x^{n+p} \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$.
- $x^n = x^{n+p} \cdot \frac{1}{x^p}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ donc $x^n \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x^{n+p})$. ■

Théorème 7 (Manipulation des petits o).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
2. Si $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(x) + \mathcal{O}(x^n)$.

1.3 Premiers développements limités

Théorème 8 (Lien avec les équivalents).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Il y a équivalence entre

1. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^n$.
2. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^n + \mathcal{O}(x^n)$.

Théorème 9.

- | | |
|--|---|
| 1. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x)$. | 4. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \mathcal{O}(x)$. |
| 2. $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x)$. | 5. $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x)$. |
| 3. $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x)$. | 6. $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$. |

1.4 Propriétés des $\mathcal{O}()$

Théorème 10 (Addition).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$ et si $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$ alors $f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$ et $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$.
2. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leq p$.
 - (a) $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^p) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$.
 - (b) $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^p) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x^p)$.

Exemple 11. Déterminer un équivalent en 0 de $x \mapsto \tan(x) + \sin(x)$ et de $x \mapsto \tan(x) - \sin(x)$.

- $\tan(x) + \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x) + x + \mathcal{O}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + \mathcal{O}(x)$
- $\tan(x) - \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x) - x - \mathcal{O}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x)$

Théorème 12 (Multiplication, Quotient).

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

1. Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$ alors $\lambda.f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$ $\lambda.\mathcal{O}(g) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.
2. Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(\lambda.x^n)$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$. $\mathcal{O}(\lambda.g) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.
3. Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$ et si $x^n \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^p)$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^p)$. $\mathcal{O}(\mathcal{O}(h)) \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$.
4. Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$ alors $f(x).x^p \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^{n+p})$. $h.\mathcal{O}(g) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g) \underset{a}{=} \mathcal{O}(gh)$.
5. Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$ et si $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^p)$ alors $f(x)g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^{n+p})$. $\mathcal{O}(g).\mathcal{O}(k) \underset{a}{=} \mathcal{O}(gk)$.
6. Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$ alors $(f(x))^p \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^{np})$. $\mathcal{O}(g)^n \underset{a}{=} \mathcal{O}(g^n)$.

Exemple 13. Déterminer un équivalent en 0 de $x \mapsto 2 \tan(x) - 3 \sin(x)$.

$$3 \tan(x) - 2 \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + 2 \mathcal{O}(x) - 3x - 3 \mathcal{O}(x) = -x + \mathcal{O}(x).$$

$$\text{Donc, } 3 \tan(x) - 2 \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x.$$

Exemple 14. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{x}$.

$$e^x - \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \mathcal{O}(x) - 1 - \frac{x}{2} - \mathcal{O}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} - \mathcal{O}(x).$$

$$\text{Donc, } e^x - \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}. \text{ Donc, } \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{x} = \frac{1}{2}.$$

Théorème 15 (Substitution).

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$ et si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ alors $f(g(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}((g(x))^n)$.

Exemple 16.

- $\cos(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{(x^2)^2}{2} + \mathcal{O}((x^2)^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^4)$.
- $e^{-x^4} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (-x^4) + \mathcal{O}((-x^4)) = 1 - x^4 + \mathcal{O}(x^4)$

2 Développements limités en 0

2.1 Définitions et premiers exemples

Définition 17.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit que la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0 lorsqu'il existe des réels $(a_0, \dots, a_n)$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \mathcal{O}(x^n) = \sum_{k=0}^n a_kx^k + \mathcal{O}(x^n)$$

La fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_kx^k$ est appelée la partie régulière du développement limité.

Notation On notera souvent $DL_n(0)$ pour parler d'un développement limité à l'ordre n en 0.

Exemple 18. Développements limités à l'ordre 1 en 0

1. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x).$
2. $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \mathcal{O}(x).$
3. $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x)$
4. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \mathcal{O}(x).$
5. $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x).$
6. $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x).$

Exemple 19. Soit $f(x) = \pi + 5x + x^3$. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0.

$x^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^2)$. Donc, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \pi + 5x + \mathcal{O}(x^2)$.

Théorème 20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + \mathcal{O}(x^n)$$

Démonstration : $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k$. Donc, $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Or, $\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \cdot \frac{x}{1-x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0$ donc $\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^n)$.

Finalement, $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + \mathcal{O}(x^n)$. ■

Exemple 21. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \frac{2}{1-x}$.

2.2 Développements limités obtenus par substitution

Théorème 22 (Substitution).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que f admette un $DL_n(0)$.

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + \mathcal{O}(x^n).$$

Pour toute fonction g définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$,

$$f(g(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k g(x)^k + \mathcal{O}(g(x)^n).$$

Exemple 23. Déterminer un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$ donc on peut substituer x par $-x$ dans le théorème précédent.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - (-x)} &= \sum_{k=0}^n (-x)^k + \mathcal{O}((-x)^n) \\ \frac{1}{1 + x} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \mathcal{O}(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathcal{O}(x^n) \end{aligned}$$

Exemple 24. En remplaçant x par $-x^2$ on obtient

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^n (-x^2)^k + \mathcal{O}(x^n) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2n})$$

On a maintenant un développement limité à l'ordre $2n$ et non plus n .

2.3 Développements limités obtenus par primitivation

Théorème 25.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que f admette un $\text{DL}_n(0)$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \mathcal{O}(x^n).$$

Soit F une primitive F de f sur I . Alors, F admet un développement limité à l'ordre $n + 1$ en 0 donné par

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Remarque 26. On peut donc intégrer les développements limités en n'oubliant pas la **constante d'intégration**.

Exemple 27.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $\sin$ en 0.

On va commencer par le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la dérivée de $\sin$.

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 + \mathcal{O}(x) \\ \sin(x) &= \sin(0) + x + \mathcal{O}(x^2) \\ \sin(x) &= x + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned}$$

2. Déterminer un développement limité de $\cos$ en 0 à l'ordre 3.

On intègre de nouveau le développement limité de la question précédente.

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + \mathcal{O}(x^2) \\ -\cos(x) &= -\cos(0) + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \end{aligned}$$

3. Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \rightarrow \ln(1 + x)$.

On commence par le développement limité à l'ordre 2 de la dérivée de $x \mapsto \ln(1+x)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^2) \\ \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) \\ \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)\end{aligned}$$

Exemple 28.

1. Rappeler la dérivée de la fonction $\tan$.
 $\tan' = 1 + \tan^2$.
2. En déduire un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan$.

$$\begin{aligned}\tan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x) \\ (\tan(x))^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + 2x\mathcal{O}(x) + (\mathcal{O}(x))^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \mathcal{O}(x^2) \\ 1 + (\tan(x))^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + \mathcal{O}(x^2) \\ \tan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)\end{aligned}$$

3. En déduire un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan$.

$$\begin{aligned}(\tan(x))^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)\right)^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \frac{x^9}{9} + \mathcal{O}(x^6) + \frac{2}{3}x^4 + 2x\mathcal{O}(x^3) + \frac{2}{3}x^3\mathcal{O}(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \mathcal{O}(x^4) \\ 1 + (\tan(x))^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \mathcal{O}(x^4) \\ \tan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \mathcal{O}(x^5)\end{aligned}$$

2.4 Développements limités obtenus par opérations sur des développements limités usuels

Théorème 29.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des développements limités à l'ordre n en 0.

1. La fonction $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 obtenu en additionnant les développements limités de f et de g .
2. La fonction fg admet un développement à l'ordre n en 0 obtenu en multipliant les développements limités de f et de g .

Exemple 30. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions $\text{ch} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3). \\
\bullet \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3).
\end{aligned}$$

Exemple 31. Déterminer un développement limité de $x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$ à l'ordre 4 en 0.

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^5)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \mathcal{O}(x^4).$$

Exemple 32. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \cos(x)$. Déterminer le développement limité de cette fonction à l'ordre 3 en 0.

$$\begin{aligned}
e^x \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) + x - \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^4) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5) + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{12} + \mathcal{O}(x^6) + \mathcal{O}(x^3) + \mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^6) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^3) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)
\end{aligned}$$

Exemple 33. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\cos(x))^2$. Déterminer le développement limité de cette fonction à l'ordre 4 en 0.

$$\begin{aligned}
(\cos(x))^2 &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + \mathcal{O}(x^4)\right) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(2 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \mathcal{O}(x^4)\right) \\
&\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^4)
\end{aligned}$$

2.5 Développements limités obtenus par la formule de Taylor-Young

Théorème 34.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Alors, la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathcal{O}(x^n)$$

Exemple 35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto e^x$.

On va calculer les dérivées successives en 0 de $f : x \mapsto e^x$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = f$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 1$.

Finalement, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \mathcal{O}(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^n)$.

Exemple 36. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 3 de $x \mapsto \sin(x)$.

On va calculer les trois premières dérivées de $f = \sin$.

- $f' = \cos$. Donc, $f'(0) = 1$.
- $f^{(2)}(x) = -\sin$. Donc, $f^{(2)}(0) = 0$.
- $f^{(3)}(x) = -\cos$. Donc, $f^{(3)}(0) = -1$.

Finalement, $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^3)$.

Exemple 37. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

On va calculer les trois premières dérivées en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. Donc, $f'(0) = \frac{1}{2}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, f^{(2)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} (1+x)^{-\frac{3}{2}}$. Donc, $f^{(2)}(0) = \frac{-1}{4}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, f^{(3)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} (1+x)^{-\frac{5}{2}}$. Donc, $f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$.

Finalement, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^3)$.

Exemple 38. Soit $\alpha \in [3, +\infty[$. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

2.6 Développements limités obtenus par composition à droite

Exemple 39. Simplifier les expressions suivantes : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^4 + 2x)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}((\sin(x))^3)$

$x^4 + 2x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(2x)$.

$\sin(x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$ donc $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^3)$.

Exemple 40. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto e^{\sin(x)}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ donc on peut substituer x par $\sin(x)$ dans le développement limité en 0 de $\exp$.

$$e^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sin(x) + \frac{(\sin(x))^2}{2} + \frac{(\sin(x))^3}{3!} + \mathcal{O}((\sin(x))^3)$$

On s'occupe ensuite de chaque terme séparément.

$$(\sin(x))^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3 \text{ donc } \mathcal{O}((\sin(x))^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^3)$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$(\sin(x))^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$(\sin(x))^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$

Finalement,

$$e^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

Exemple 41. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1 + \tan(x))$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = 0$ donc on peut substituer x par $\tan(x)$ dans le développement limité en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.

$$\ln(1 + \tan(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan(x) - \frac{(\tan(x))^2}{2} + \frac{(\tan(x))^3}{3} + \mathcal{O}((\tan(x))^3)$$

On s'occupe ensuite de chaque terme séparément.

$$(\tan(x))^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3 \text{ donc } \mathcal{O}((\tan(x))^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^3)$$

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$(\tan(x))^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$(\tan(x))^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$

Finalement,

$$\ln(1 + \tan(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$

3 Propriétés des développements limités

3.1 Unicité du développement limité

Théorème 42.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a alors ses coefficients $(a_0, \dots, a_n)$ sont uniques.

Remarque 43. Que peut-on dire du développement limité en 0 d'une fonction paire ?

3.2 Calculs de limites et d'équivalents

Théorème 44.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0 alors f est équivalente en 0 au premier terme **non nul** de son développement limité.

Exemple 45. Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $x \rightarrow \ln(1+x) - \sin(x)$.

On va déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction.

$$\ln(1+x) - \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} - x + \mathcal{O}(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$$

Donc, $\ln(1+x) - \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Exemple 46. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

$$e^x - x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2) - x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$$

Donc $e^x - x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Donc, $\frac{e^x - x - 1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

3.3 Etude locale de fonction

Théorème 47.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.
On suppose que f admet un développement limité en 0 de la forme $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_px^p + \mathcal{O}(x^p)$.

1. La tangente à la courbe de la fonction f en 0 a pour équation $y = a_0 + a_1x$.
2. La position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de a_px^p au voisinage de 0.

Exemple 48. Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

$$D_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[.$$

2. Déterminer la limite de f en 0.

On va utiliser un développement limité de f en 0.

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2) - x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(1)$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$.

3. Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

Il faut obtenir un développement limité à l'ordre 2 pour pouvoir conclure.

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^4) - x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^2)$$

La tangente en 0 a pour équation $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$.

De plus, $f(x) - \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{4}$. Donc, la courbe est en dessous de la tangente.

4 Formulaire de développements limités usuels en 0

$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=}$	
$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=}$	
$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=}$	
$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=}$	
$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=}$	
$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=}$	
$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=}$	
$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=}$	
$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=}$	