

# Chapitre 21 : Variables aléatoires sur un univers fini (prof)

## Table des matières

|          |                                                                        |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Variables aléatoires réelles</b>                                    | <b>2</b>  |
| 1.1      | Définition et exemples . . . . .                                       | 2         |
| 1.2      | Loi d'une variable aléatoire. . . . .                                  | 2         |
| <b>2</b> | <b>Lois usuelles</b>                                                   | <b>3</b>  |
| 2.1      | Loi uniforme . . . . .                                                 | 3         |
| 2.2      | Loi de Bernoulli . . . . .                                             | 3         |
| 2.3      | Loi binomiale . . . . .                                                | 4         |
| <b>3</b> | <b>Fonction de répartition d'une variable aléatoire.</b>               | <b>5</b>  |
| 3.1      | Événements associés à une variable aléatoire . . . . .                 | 5         |
| 3.2      | Système complet d'événements associé à une variable aléatoire. . . . . | 5         |
| 3.3      | Fonctions de répartition d'une variable aléatoire réelle . . . . .     | 6         |
| 3.4      | Retour sur les lois usuelles. . . . .                                  | 7         |
| <b>4</b> | <b>Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle</b>           | <b>8</b>  |
| 4.1      | Définition et espérance des lois usuelles. . . . .                     | 8         |
| 4.2      | Propriétés de l'espérance . . . . .                                    | 8         |
| 4.3      | Formule de transfert . . . . .                                         | 8         |
| 4.4      | Définitions et variance des lois usuelles. . . . .                     | 9         |
| 4.5      | Propriétés de la variance. . . . .                                     | 9         |
| <b>5</b> | <b>Familles de variables aléatoires réelles</b>                        | <b>10</b> |
| 5.1      | Couples de variables aléatoires réelles . . . . .                      | 10        |
| 5.2      | Indépendance pour un couple de variables aléatoires . . . . .          | 10        |
| 5.3      | Indépendance d'une famille finie de variables aléatoires . . . . .     | 11        |
| 5.4      | Lien entre la loi binomiale et la loi de Bernoulli . . . . .           | 12        |
| <b>6</b> | <b>Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.</b>                 | <b>12</b> |

# 1 Variables aléatoires réelles

## 1.1 Définition et exemples

### Définition 1.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini.

On appelle variable aléatoire réelle sur  $\Omega$  toute fonction définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$$X : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto X(\omega) \end{cases}$$

On note  $X(\Omega)$  les valeurs possibles de la variable aléatoire  $X$ .

### Exemple 2.

- On lance un dé à 6 faces. Soit  $X$  la variable aléatoire qui correspond au nombre obtenu.  $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ .
- On pioche simultanément 3 cartes dans un jeu classique de 32 cartes. Soit  $Y$  la variable aléatoire qui correspond au nombre de cartes cœur obtenu.  $Y(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$ .

### Remarque 3.

- Malgré son nom, une variable aléatoire n'a rien d'aléatoire.
- On définira l'univers et la probabilité avant la variable aléatoire.

## 1.2 Loi d'une variable aléatoire.

### Définition 4.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ .

On appelle loi de la variable aléatoire  $X$  la donnée de  $X(\Omega)$  et de la fonction  $f_X : \begin{cases} X(\Omega) \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto P(X = x) \end{cases}$

### Exemple 5.

- On lance un dé à 6 faces. Soit  $X$  la variable aléatoire qui correspond au nombre obtenu.  $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$  et  $\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \frac{1}{6}$ .

- On pioche simultanément 2 cartes dans un jeu classique de 32 cartes.  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \llbracket 1, 32 \rrbracket^2, x_1 \neq x_2\}$  et on travaille avec la probabilité uniforme. Soit  $Y$  la variable aléatoire qui correspond au nombre de cartes cœur obtenu.  $Y(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ ,

$$P(Y = 0) = \frac{\binom{24}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{69}{124},$$

$$P(Y = 1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{24}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{6}{31}$$

$$P(Y = 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = \frac{31}{124}.$$

**Remarque 6.** Deux variables aléatoires peuvent avoir la même loi sans être égales.

## 2 Lois usuelles

### 2.1 Loi uniforme

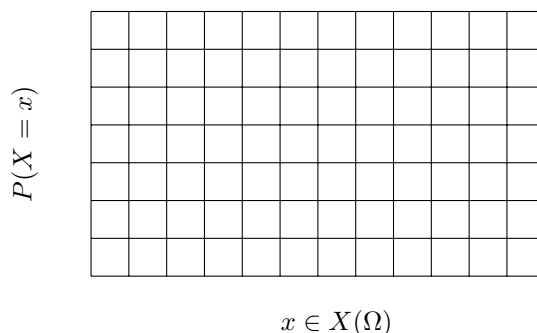
#### Définition 7.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ . Soit  $E \subset \mathbb{R}$ , un ensemble **fini**.

On dit que  $X$  suit une loi uniforme sur  $E$  et on note  $X \sim \mathcal{U}(E)$  lorsque :

1.  $X(\Omega) = E$
2.  $\forall x \in E, f_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{|E|}$ .

Par exemple, si  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ ,



#### Exemple 8.

- On choisit un nombre au hasard entre 1 et 100.
- On lance un dé à 6 faces deux fois de suite et on note  $X$  la variable aléatoire représentant le couple obtenu.

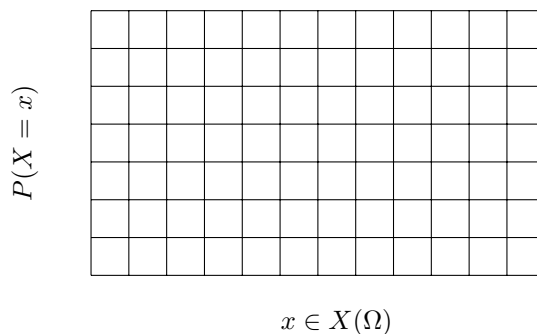
### 2.2 Loi de Bernoulli

#### Définition 9.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ . Soit  $p \in [0, 1]$ .

On dit que  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  et on note  $X \sim \mathcal{B}(p)$  lorsque :

1.  $X(\Omega) = \{0, 1\}$
2.  $P(X = 0) = 1 - p$  et  $P(X = 1) = p$ .



**Exemple 10.** Cette loi est rencontrée lorsqu'on réalise une expérience qui n'a que deux issues possibles. Une est appelée le succès et l'autre l'échec.

- On lance une pièce de monnaie et on note  $X$  la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le lancer veut pile et 0 sinon.
- On lance un dé à 6 faces et on note  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le résultat est pair et 0 sinon.

**Définition 11.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $A \subset \Omega$ .

On appelle indicatrice de  $A$  la variable aléatoire réelle notée  $\mathbb{1}_A$  et définie par

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} \Omega \rightarrow \{0, 1\} \\ \omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases} \end{cases}$$

**Théorème 12.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $A \subset \Omega$ .

La variable aléatoire  $\mathbb{1}_A$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p = P(A)$ .

**2.3 Loi binomiale****Définition 13.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ .

Soit  $p \in [0, 1]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On dit que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  et on note  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  lorsque :

1.  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$
2.  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ .

**Exemple 14.** Cette loi est rencontrée lorsqu'on réalise  $n$  fois de façons indépendantes la même expérience à deux issues et qu'on compte le nombre de succès.

- On lance  $n$  fois une pièce de monnaie et on note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de pile obtenu.  
 $X$  suit une loi binomiale de paramètres
- On lance  $n$  fois un dé à 6 faces et on note  $Y$  la variable aléatoire qui représente le nombre de chiffres pairs obtenu.  
 $Y$  suit une loi binomiale de paramètres
- On pioche successivement avec remise  $n$  boules dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires. On note  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches obtenu.  
 $X$  suit une loi binomiale de paramètres

### 3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire.

#### 3.1 Événements associés à une variable aléatoire

##### Définition 15.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $(X = x)$  l'événement  $\{w \in \Omega, X(w) = x\}$  et  $P(X = x)$  sa probabilité.

On note  $(X \leq x)$  l'événement  $\{w \in \Omega, X(w) \leq x\}$  et  $P(X \leq x)$  sa probabilité.

Pour  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on note  $(X \in I)$  l'événement  $\{w \in \Omega, X(w) \in I\}$  et  $P(X \in I)$  sa probabilité.

##### Exemple 16.

- On lance un dé à 6 faces. Soit  $X$  la variable aléatoire qui correspond au nombre obtenu.

$$P(X = 2) = \frac{1}{6}.$$

- On pioche simultanément 3 cartes dans un jeu classique de 32 cartes. Soit  $Y$  la variable aléatoire qui correspond au nombre de cartes cœur obtenu.

$$P(Y = 0) = \frac{\text{card}(Y = 0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}}.$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{367}{620}.$$

#### 3.2 Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.

##### Théorème 17.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ .

Les événements  $(\{X = x\}, x \in X(\Omega))$  forment un système complet d'événements.

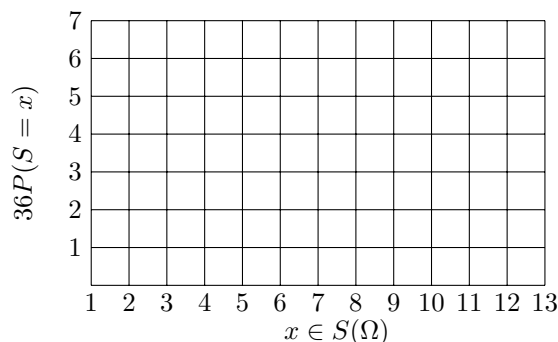
**Exemple 18.** Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $X(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ . Soit  $A$  un événement.

$$P(A) = \sum_{k=1}^4 P(A \cap (X = k)) = \sum_{k=1}^4 P(X = k)P(A|X = k)$$

**Exemple 19.** On lance deux dés à 6 faces et on note  $S$  la variable aléatoire représentant la somme des deux résultats obtenus.

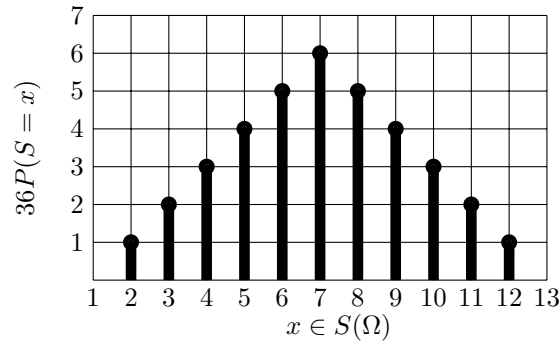
Déterminer la loi de la variable  $S$ .

On peut représenter la loi de  $S$  par le diagramme en bâtons suivant.



La loi de  $S$  est donnée par  $S(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$  et

| $x$        | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $P(S = x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |



### 3.3 Fonctions de répartition d'une variable aléatoire réelle

#### Définition 20.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ .

On appelle fonction de répartition de  $X$  la fonction  $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto P(X \leq t) \end{cases}$

**Exemple 21.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de loi donnée par

| $x$        | 1             | 2             | 3             |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{6}$ |

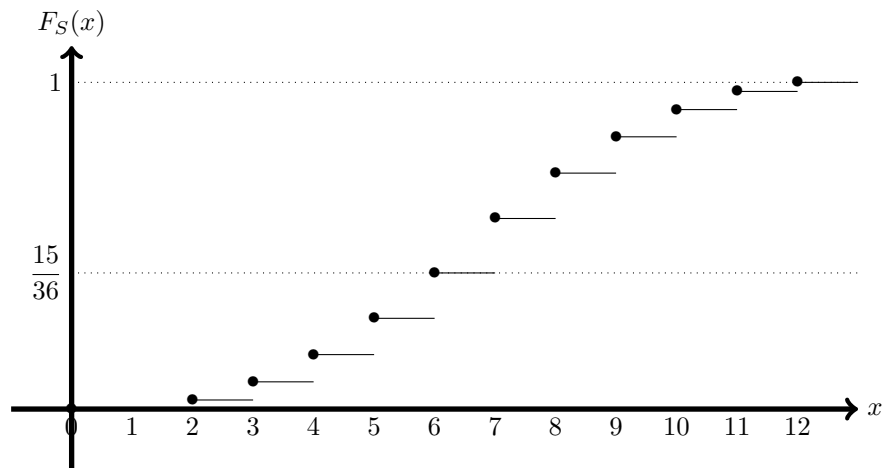
Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .

**Exemple 22.** On lance deux dés à 6 faces et on note  $S$  la variable aléatoire représentant la somme des deux résultats obtenus.

La loi de  $S$  est donnée par  $S(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$  et

| $x$        | 2              | 3              | 4              | 5               | 6               | 7               | 8               | 9               | 10              | 11              | 12             |
|------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| $P(S = x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$  | $\frac{5}{36}$  | $\frac{6}{36}$  | $\frac{5}{36}$  | $\frac{4}{36}$  | $\frac{3}{36}$  | $\frac{2}{36}$  | $\frac{1}{36}$ |
| $F_S(x)$   | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{15}{36}$ | $\frac{21}{36}$ | $\frac{26}{36}$ | $\frac{30}{36}$ | $\frac{33}{36}$ | $\frac{35}{36}$ | 1              |

On trace la fonction de répartition de  $S$  et on remarque que c'est une fonction en escalier croissante sur  $\mathbb{R}$ .



**Théorème 23** (Lien entre la fonction de répartition et la loi).

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$  avec  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ .

1. On détermine la fonction de répartition à partir de la loi.

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(X \leq t) = \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P(X = k)$$

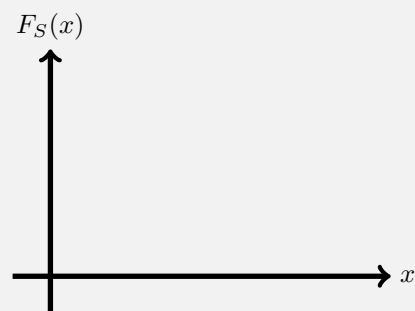
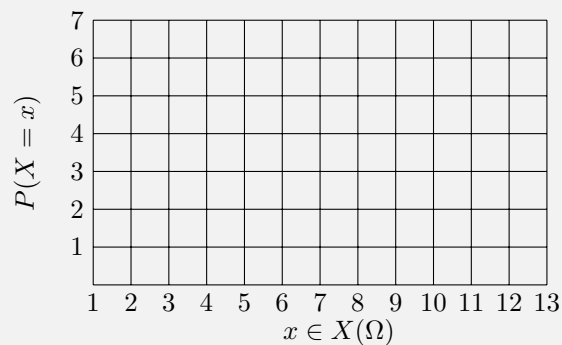
2. On retrouve la loi à partir de la fonction de répartition.

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X \leq n) - P(X \leq n - 1)$$

### 3.4 Retour sur les lois usuelles.

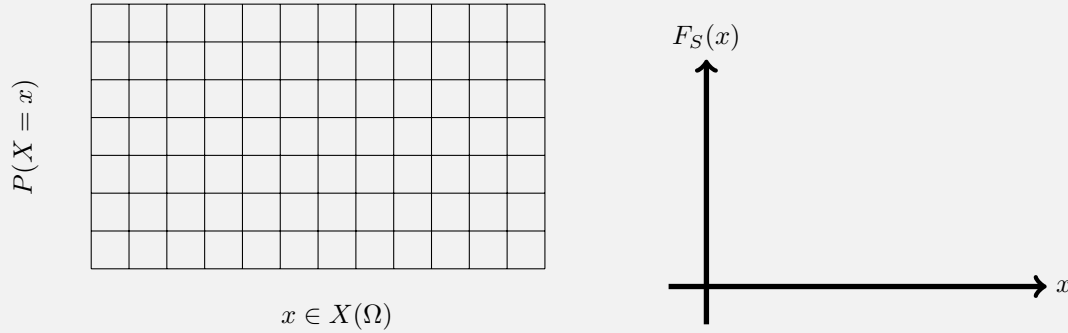
**Théorème 24.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle qui suit une loi uniforme sur  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ ,



**Théorème 25.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé. Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .



## 4 Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle

### 4.1 Définition et espérance des lois usuelles.

**Définition 26.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ . On appelle espérance de  $X$  et on note  $E(X)$  la quantité

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

**Théorème 27.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ .

1. Soit  $E$  un ensemble fini non vide. Si  $X \sim \mathcal{U}(E)$  alors  $E(X) = \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} x$ .
2. Soit  $p \in [0, 1]$ . Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$  alors  $E(X) = p$ .  
Soit  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ . Alors,  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $p \in [0, 1]$ . Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  alors  $E(X) = np$ .

### 4.2 Propriétés de l'espérance

**Théorème 28.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ .

1. **Linéarité** :  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$ .  
 $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, E(aX + b) = aE(X) + b$ .
2. **Positivité** : Si  $X \geq 0$  alors  $E(X) \geq 0$ .
3. **Croissance** : Si  $X \geq Y$  alors  $E(X) \geq E(Y)$ .
4. **Inégalité triangulaire** :  $|E(X)| \leq E(|X|)$ .

**Exemple 29.** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $]0, 5]$ . Déterminer  $E(X^2)$ .

### 4.3 Formule de transfert

#### Théorème 30 (Admis).

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ . Soit  $f$  une fonction de  $X(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

**Remarque 31.** On utilise cette formule pour calculer  $E(X^2)$  ou  $E(X^3)$  par exemple.

**Exemple 32.** On choisit un nombre au hasard entre 1 et 100. On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre choisi.

Déterminer l'espérance de  $Y = (-1)^X$ .

### 4.4 Définitions et variance des lois usuelles.

#### Définition 33.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on appelle moment d'ordre  $k$  de la variable  $X$  la quantité  $E(X^k)$ .

**Remarque 34.** On peut calculer les moments grâce à la formule de transfert.

#### Définition 35.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . On appelle variance de la variable aléatoire  $X$  et on note  $V(X)$  la quantité

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$

On appelle écart-type de la variable aléatoire  $X$  et on note  $\sigma(X)$  la quantité

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

#### Théorème 36 (Formule de Koenig-Huygens).

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ .

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

#### Théorème 37.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ .

1. Soit  $p \in [0, 1]$ . Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$  alors  $V(X) = p(1 - p)$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $p \in [0, 1]$ . Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  alors  $V(X) = np(1 - p)$ .

## 4.5 Propriétés de la variance.

### Théorème 38.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ .

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, V(aX + b) = a^2 V(X).$$

### Remarque 39.

- Si  $\sigma(X) > 0$ , la variable  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance 1.  
On dit que c'est une variable **centrée réduite**.
- Si  $V(X) = 0$  alors  $P(X = E(X)) = 1$ . On dit que  $X$  est presque sûrement constante.

## 5 Familles de variables aléatoires réelles

### 5.1 Couples de variables aléatoires réelles

#### Définition 40.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ .  
On appelle loi du couple  $(X, Y)$  la donnée des réels  $P(X = x \cap Y = y)$  avec  $(x, y) \in (X(\Omega), Y(\Omega))$ .

#### Théorème 41 (Probabilités totales).

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$  avec  $\forall x \in X(\Omega), P(X = x) > 0$ .  
Soit  $y \in Y(\Omega)$ .

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(Y = y \cap X = x) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(Y = y | X = x) P(X = x) \end{aligned}$$

**Exemple 42.** Soient deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  dont la loi du couple est donnée par le tableau suivant qui donne la valeur de  $P(X = x \cap Y = y)$ .

| $y = \backslash x =$ | 0              | 1              |
|----------------------|----------------|----------------|
| 0                    | $\frac{1}{16}$ | $\frac{5}{16}$ |
| 1                    | $\frac{7}{16}$ | $\frac{3}{16}$ |

1. Déterminer  $P(X = 0)$ .
2. Déterminer la loi de la variable  $X$ , puis celle de  $Y$ .

## 5.2 Indépendance pour un couple de variables aléatoires

### Définition 43.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ . On dit que les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes lorsque

$$\forall (x, y) \in (X(\Omega), Y(\Omega)), P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

**Exemple 44.** On reprend l'exemple précédent. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

### Théorème 45.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$  et  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

### Théorème 46.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors

$$\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega), P(X \in A \cap Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

### Théorème 47.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$ . Soit  $g$  une fonction définie sur  $Y(\Omega)$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

**Exemple 48.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles indépendantes.

1. Les variables  $X$  et  $Y^2$  sont indépendantes.
2. Les variables  $X^2$  et  $Y^3$  sont indépendantes.

## 5.3 Indépendance d'une famille finie de variables aléatoires

### Définition 49.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ . On dit que les variables sont deux à deux indépendantes lorsque

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes.}$$

### Définition 50.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ . On dit que les variables sont mutuellement indépendantes lorsque

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, P\left(\bigcap_{i \in I} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i \in I} P(X_i = x_i)$$

**Remarque 51.** L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux. Cependant la réciproque est fautive comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 52.** On lance 2 fois une pièce de monnaie. On définit les variables aléatoires suivantes.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient pile au 1er lancer,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient face au 2ème lancer,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient la même chose aux 2 lancers,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

Montrer qu'elles sont 2 à 2 indépendantes mais pas mutuellement indépendantes.

**Théorème 53 (Admis).**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles sur  $\Omega$  **mutuellement indépendantes**.

$$E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) E(X_2) \dots E(X_n)$$

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

**Théorème 54 (Lemme des coalitions.).**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ .

1. Toute sous-famille est encore une famille de variables mutuellement indépendantes.
2. Soit  $m \in \mathbb{N}, m \leq n$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions.  
Les variables aléatoires  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.
3. Soient  $f_1, \dots, f_n$  des fonctions.  
Les variables aléatoires  $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$  sont mutuellement indépendantes.

**Exemple 55.** Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois variables aléatoires réelles indépendantes.

1. Les variables  $X + Y$  et  $Z$  sont indépendantes.
2. Les variables  $X^2, Z^3$  et  $-Y$  sont mutuellement indépendantes.

## 5.4 Lien entre la loi binomiale et la loi de Bernoulli

**Théorème 56.**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ .

Alors, la variable aléatoire  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  suit une loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ .

En particulier,  $V(X) = np(1 - p)$ .

## 6 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

### Théorème 57.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle **positive** sur  $\Omega$ .

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

### Théorème 58.

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ .

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

**Remarque 59.** On retrouve la mesure de la dispersion autour de la valeur moyenne.

**Exemple 60.** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, la probabilité d'obtenir FACE n'est pas  $\frac{1}{2}$ .

1. On cherche à estimer la probabilité  $p$  d'obtenir FACE. Comment peut-on estimer cette valeur ?
2. A partir de combien de lancers, la méthode proposée donne une valeur approchée de  $p$  à  $10^{-2}$  près avec une probabilité supérieure à 0,95 ?