

Exercice 1 Dans chacune des expériences suivantes, déterminer $X(\Omega)$ et reconnaître la loi de X (uniforme, bernoulli, binomiale). Préciser ses paramètres.

1. On interroge une élève au hasard à la sortie du lycée. On note X la variable aléatoire qui vaut 0 si elle est droitnière et 1 si elle est gauchère.
2. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le premier tiroir.
3. Une prof de maths choisit un ou une élève de Bio11 au hasard pour passer au tableau. On note W la variable aléatoire qui vaut le prénom de la personne interrogée.
4. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. X est le nombre de bosses.
5. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On pioche une carte au hasard. On note Z la variable qui vaut 1 si c'est un As et 0 sinon.
6. On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon et d'une fille sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
7. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. X est le nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 2

Un joueur lance deux fois de suite un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du second lancer.

1. Déterminer les lois de X , $|X|$, X^2 .
Ce ne sont pas forcément des lois usuelles.
2. Calculer l'espérance de X^2 .

Exercice 3 Un jugement est soumis au vote d'un jury de 12 membres. Ce jugement doit être voté à la majorité des deux tiers pour devenir exécutoire. Les jurés ont le choix entre deux décisions A et B . Il se déterminent indépendamment les uns des autres et la probabilité de choisir la décision A est $\frac{1}{5}$ pour chacun d'eux.

1. Soit X le nombre de jurés prenant la décision A . Déterminer la loi de X .
2. Quelle est la probabilité que la décision A soit adoptée par le jury ? On l'exprimera sous forme de somme.

Exercice 4 Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées 0, 1, 2, ..., 100 de gauche à droite.

Une puce se trouve au départ sur la case 0. Elle se déplace vers la droite, de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Elle effectue 50 sauts.

On note X_1 le numéro de la case occupée par la puce après un saut, X_2 le numéro de la case occupée par la puce après deux sauts.

On note Y_2 le nombre de fois où elle a sauté d'une seule case au cours des 2 premiers sauts et Y_{50} au cours des 50 sauts.

On note X_{50} le numéro de la case occupée après 50 sauts.

1. Déterminer la loi de X_1 , puis son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y_2 .
3. En déduire la loi de X_2 .
4. Déterminer la loi de Y_{50} , puis son espérance et sa variance.
5. Exprimer X_{50} en fonction de Y_{50} et en déduire l'espérance et la variance de X_{50} .
6. Déterminer la loi de X_{50} .

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}\left(5, \frac{1}{3}\right)$. Les résultats de X sont affichés sur un compteur détraqué :

- si $X \neq 0$, le compteur affiche X .
- Si $X = 0$, le compteur affiche un nombre au hasard entre 1 et 5.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au nombre affiché sur le compteur.
On pourra commencer par $P(Y = 1)$.
2. Calculer $E(Y)$. On donnera le résultat sous forme de somme.
3. Montrer que $E(Y) \geq E(X)$.

4. Reprendre les questions précédentes dans le cas d'une loi binomiale de paramètres n et p quelconques.

Exercice 6 Soient $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \lambda k.$$

Déterminer λ , $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 7 Simulations de variables aléatoires réelle

- Rappeler le moyen de simuler une loi de Bernoulli de paramètre p .
- Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \leq b$, et soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.
 - Déterminer μ et n tels que la variable aléatoire $Y = X + \mu$ suive la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 - En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 8 Problème des rencontres

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On les extrait successivement sans remise.

On dit qu'il y a rencontre au i -ème tirage si la i -ème boule tirée porte le numéro i .

- Déterminer la probabilité d'une rencontre au premier tirage.
- Déterminer la probabilité d'une rencontre au second tirage.
- Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer la probabilité qu'il y ait rencontre au i -ème tirage.
On pourra penser aux permutations de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- Soit X la variable aléatoire égale au nombre de rencontres. Déterminer $E(X)$.
on pourra décomposer X en somme de variables de Bernoulli.

Exercice 9 Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne.

On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire qui vaut 1 si le premier tirage (respectivement le second tirage) amène une boule blanche, 0 sinon.

- Déterminer la loi de X_1 .
- Déterminer, à partir de l'énoncé, $P(X_2 = 0|X_1 = 0), P(X_2 = 0|X_1 = 1), P(X_2 = 1|X_1 = 0)$ et $P(X_2 = 1|X_1 = 1)$.
- En déduire la loi de X_2 .
- En déduire la loi du couple (X_1, X_2) .
- Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 10 Soit un entier $n \geq 2$.

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n .

Dans l'urne numéro k , il y a k boules numérotées de 1 à k .

On choisit une urne au hasard puis dans celle-ci, on pioche une boule au hasard.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie, et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

- Quelle est la loi de X ?
- Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$. Déterminer, à partir de l'énoncé, $P(Y = j|X = i)$.
- En déduire la loi du couple (X, Y) , puis la loi de X et celle de Y .
(on exprimera certaines probabilités sous forme de sommes).
- Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

Exercice 11 On lance n fois une pièce non truquée. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce donne pile et 0 sinon.

On note F_n la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de "pile" au cours des n expériences.

- Exprimer F_n en fonction de $X_1, \dots, X_n$.
- Calculer $E(F_n)$ et $V(F_n)$.
- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur à n_0 , on ait $P(0,49 < F_n < 0,51) \geq 95\%$ (on dit alors que $]0,49, 0,51[$ est un intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95%).