

Chapitre 24 : Dérivabilité d'une fonction réelle

Table des matières

1	Etude de la dérivabilité.	2
1.1	Définitions	2
1.2	Etude de la dérivabilité en un point	2
1.3	Opérations sur les fonctions dérivables	3
1.4	Dérivabilité d'une bijection réciproque	4
2	Propriétés des fonctions dérivables	4
2.1	Extrema	4
2.2	Théorème de Rolle	5
2.3	Égalité des accroissements finis	5
2.4	Application : Inégalité des accroissements finis (A refaire à chaque fois)	5
2.5	Caractérisation de la monotonie d'une fonction	5
3	Fonctions de classes \mathcal{C}^k	6
3.1	Définitions	6
3.2	Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k	7

1 Etude de la dérivabilité.

1.1 Définitions

Définition 1.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}.$$

On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I .

Exemple 2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en 1.

Exemple 3. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Cette fonction est-elle continue en 0? Dérivable en 0?

Définition 4.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Lorsque f est dérivable en a , le réel ℓ de la définition 1 est appelé nombre dérivé de f en a . On le note $f'(a)$.

Lorsque f est dérivable sur I , on appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction définie par

$$f' : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto f'(a) \end{cases}$$

On note $\mathcal{D}(J, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur J à valeurs dans \mathbb{R} .

Théorème 5.

Les fonctions usuelles, exceptée la fonction racine carrée, sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Exemple 6. Montrer que si f est une fonction constante sur I alors sa fonction dérivée est la fonction identiquement nulle.

1.2 Etude de la dérivabilité en un point

Exemple 7. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Exemple 8. Etudier la dérivabilité en 0 de $x \mapsto x\sqrt{x}$.

Définition 9.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ autre que l'extrémité gauche.
On dit que la fonction f est dérivable à gauche en a lorsque

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Le nombre ℓ est noté $f'_g(a)$.

Définition 10.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ autre que l'extrémité droite.
On dit que la fonction f est dérivable à droite en a lorsque

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Le nombre ℓ est noté $f'_d(a)$.

Exemple 11. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0.

Théorème 12.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ sans en être une extrémité ($a \in \overset{\circ}{I}$).
On a une équivalence entre :

1. f est dérivable en a .
2. f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple 13. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$

Montrer que cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} .

1.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 14.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables sur I .

1. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
2. La fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.

Théorème 15.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I .

Si f ne s'annule pas, la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$.

Théorème 16.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I .

Si g ne s'annule pas, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Théorème 17.

Soient f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur J telles que $f(I) \subset J$.

La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

1.4 Dérivabilité d'une bijection réciproque**Théorème 18.**

Soit f une bijection de I sur J et soit f^{-1} sa bijection réciproque de J sur I .

Si la fonction f est dérivable en $a \in I$ avec $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(b)}.$$

Exemple 19. Etudier la dérivabilité de la fonction arctan sur son ensemble de définition puis déterminer sa dérivée.

2 Propriétés des fonctions dérivables**2.1 Extrema****Définition 20.**

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum en x_0 lorsque : $\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$.

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un minimum en x_0 lorsque : $\forall x \in I, f(x_0) \leq f(x)$.

Un extremum de f est un minimum ou un maximum de f .

Théorème 21.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I . Soit $a \in I$, sans en être une extrémité ($a \in \overset{\circ}{I}$).

Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque 22. Ce résultat vous permet de connaître les extrema locaux **possibles** en résolvant l'équation $f' = 0$. Il faut ensuite les étudier cas par cas.

Remarque 23. La réciproque est fausse.

La fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur \mathbb{R} , sa dérivée s'annule en 0 sans admettre d'extremum en 0.

2.2 Théorème de Rolle

Théorème 24.

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$,
3. $f(a) = f(b)$.

Alors, $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 25. Le réel c n'est pas unique.

Exemple 26. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant deux racines réelles distinctes. Montrer que P' s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .

2.3 Égalité des accroissements finis

Théorème 27.

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors, $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ou encore $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Exemple 28. Soit $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$.

En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in]1, 2[$ tel que $\sqrt{e} - e = \frac{-1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$.

2.4 Application : Inégalité des accroissements finis (A refaire à chaque fois)

Exemple 29. On va montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$.
Appliquer l'égalité des accroissements finis à la fonction \sin sur le segment $[x, y]$.
2. En déduire l'inégalité souhaitée.

Exemple 30. Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \sin(u_n)$.

1. La suite u est-elle bien définie ?
2. En appliquant l'égalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n}$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

2.5 Caractérisation de la monotonie d'une fonction

Théorème 31.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
 f est constante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exemple 32. Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et déterminer sa dérivée.
2. Que peut-on en déduire ?

Théorème 33.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I .

1. f est croissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

Théorème 34.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I .

1. Si f' est strictement positive sur I sauf, peut-être, en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I .
2. Si f' est strictement négative sur I sauf, peut-être, en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple 35. Etudier la monotonie de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$.

3 Fonctions de classes \mathcal{C}^k

3.1 Définitions

Définition 36.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On définit par récurrence les fonctions dérivées successives de f par

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall m \in \mathbb{N}^*, \text{ si } f^{(m-1)} \text{ est dérivable sur } I, f^{(m)} = (f^{(m-1)})' \end{cases}$$

Exemple 37. On peut montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$.

Définition 38.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe \mathcal{C}^k sur I lorsque f est k fois dérivable et que $f^{(k)}$ est continue sur I .

On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I et à valeurs dans \mathbb{K} .

On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I et à valeurs dans \mathbb{K} .

Exemple 39. La fonction exponentielle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

3.2 Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k

Théorème 40.

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^k sur un même ensemble I .

1. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe \mathcal{C}^k sur I et $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.
2. La fonction fg est de classe \mathcal{C}^k sur I .

Exemple 41. Calculer la dérivée d'ordre 3 de la fonction $f(x) = x^3 e^x$.

Théorème 42.

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soient f une fonction de classe \mathcal{C}^k sur I et g une fonction de classe \mathcal{C}^k sur J telles que $f(I) \subset J$.

La composée $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^k sur I .

Exemple 43. La fonction $x \mapsto e^{\sin(x)}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .