

Exercice 1 Pour chaque fonction, déterminer son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée.

1. $f(x) = e^{e^x}$
2. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
4. $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$
5. $f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x) - \cos(x)}{\operatorname{sh}(x) + \sin(x)}$

Exercice 2 Etudier la dérivabilité en 0, puis sur \mathbb{R} , des fonctions suivantes

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x|x|$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{|x|+1}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^x$ sur \mathbb{R}_+^* et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 4 Soient sh et ch les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. Montrer que sh est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que sh est une bijection de \mathbb{R} dans un intervalle J à déterminer.
On note argsh sa bijection réciproque.
3. Justifier que argsh est dérivable sur J et déterminer sa dérivée en fonction de ch .
4. En remarquant que $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
5. * Déterminer une expression de argsh .

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} \arctan(x)$.

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} dans un intervalle J à déterminer.
3. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .
Déterminer cette unique solution.
4. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\arctan(u_n)}{2} \end{cases}$$

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
- (b) En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
- (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$.
- (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = x - x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. f est-elle continue en 0 ?

2. f est-elle dérivable en 0 ? Est-elle dérivable sur \mathbb{R}_+ ?
Préciser f' sur son ensemble de définition.
3. f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ ? De classe C^2 sur \mathbb{R}_+ ?

Exercice 7 [*] Soit $\alpha \in]0, 1[$.

1. Soit $t \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $c \in]t, 1[$ tel que $\frac{t^\alpha - 1}{t - 1} = \alpha.c^{\alpha-1}$.
2. En déduire que $\forall t \in]0, 1]$, $t^\alpha \leq \alpha(t - 1) + 1$.