

Exercice 1 Pour chaque fonction, déterminer son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée.

1. $f(x) = e^{e^x}$
2. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
4. $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$
5. $f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x) - \cos(x)}{\operatorname{sh}(x) + \sin(x)}$

Correction

1. La fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . Donc, par composition, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (e^x)' e^{e^x} = e^x e^{e^x} = e^{x+e^x}$$

2. La fonction f est définie sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right)$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et la fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Donc, par produit, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \ln(x)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R} .

La fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R} . Par composition, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \left(\frac{1}{x} \ln(x)\right)' \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right) = \left(\frac{-\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} x^{\frac{1}{x}}$$

3. $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, \frac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R}^*$ donc la fonction f est définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

La fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Par composition, la fonction f est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ et

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

4. La fonction sh est dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . La fonction \arctan est dérivable sur \mathbb{R} . Par composition, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (\operatorname{sh}(x))' \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$$

5. La fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x) - \cos(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x) + \sin(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Cherchons les points où cette fonction s'annule.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{sh}(x) + \sin(x))' = \operatorname{ch}(x) + \cos(x)$$

La dérivée est positive sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0 donc la fonction est strictement croissante sur \mathbb{R} et est continue sur \mathbb{R} . C'est donc une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et elle ne s'annule qu'en 0.

Finalement, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions dérivables sur avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) &= \frac{(\operatorname{sh}(x) + \sin(x))^2 - (\operatorname{ch}(x) - \cos(x))(\operatorname{ch}(x) + \cos(x))}{(\operatorname{sh}(x) + \sin(x))^2} \\ &= \frac{\operatorname{sh}^2(x) + 2\operatorname{sh}(x)\sin(x) + \sin^2(x) - \operatorname{ch}^2(x) + \cos^2(x)}{(\operatorname{sh}(x) + \sin(x))^2} = \frac{2\operatorname{sh}(x)\sin(x)}{(\operatorname{sh}(x) + \sin(x))^2} \end{aligned}$$

Exercice 2 Etudier la dérivabilité en 0, puis sur \mathbb{R} , des fonctions suivantes

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x|x|.$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{|x|+1}.$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}.$

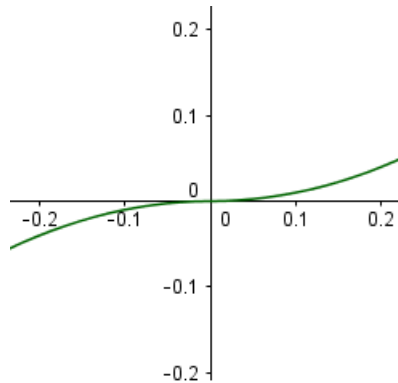
Correction

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* . Le seul point à regarder en détail est 0.

Soit $x \neq 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = |x| \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

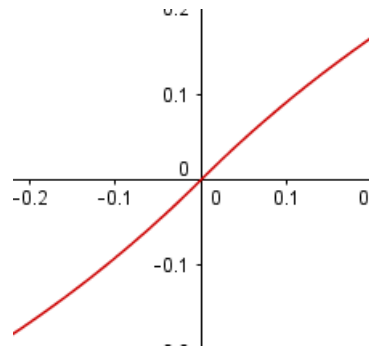


2. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Le seul point à étudier en détail est 0.

Soit $x \neq 0$.

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{1}{|x|+1} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|+1} = 1$$

On en déduit que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 1$.



3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* à valeurs dans \mathbb{R}^* . La fonction \cos est dérivable sur \mathbb{R} . Par composition, la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur \mathbb{R}^* . Par produit, la fonction h est dérivable sur \mathbb{R}^* . Le seul point à regarder en détail est 0.

Soit $x \neq 0$.

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or, la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$ donc h n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^x$ sur \mathbb{R}_+ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .

2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Correction

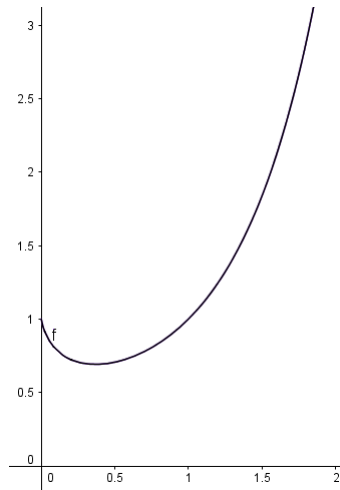
1. f est définie sur \mathbb{R}_+^* par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \exp(x \ln(x))$.

La fonction \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* donc la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R} comme produit de fonctions continues sur \mathbb{R}_+^* .

La fonction \exp est continue sur \mathbb{R} . Par composition, la fonction f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Etude en 0

$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x \ln(x)) = 1$. La fonction f est continue en 0.



2. La fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* donc la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* .

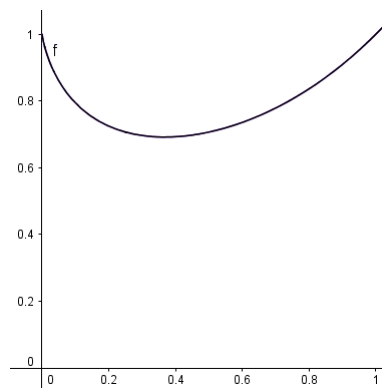
La fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R} . Par composition, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = (x \ln(x))' \exp(x \ln(x)) = (\ln(x) + 1) \exp(x \ln(x))$$

3. On va déterminer la limite du taux d'accroissement en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^x - 1}{x - 0} = \frac{e^{x \ln(x)} - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x \ln(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$. Donc, la fonction f n'est pas dérivable en 0 et admet une tangente verticale en 0.



Exercice 4 Soient sh et ch les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. Montrer que sh est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que sh est une bijection de \mathbb{R} dans un intervalle J à déterminer.
On note argsh sa bijection réciproque.
3. Justifier que argsh est dérivable sur J et déterminer sa dérivée en fonction de ch .
4. En remarquant que $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
5. * Déterminer une expression de argsh .

Correction

1. sh est continue et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$.
2. Donc sh est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .
Par le théorème de la bijection, sh est une bijection de \mathbb{R} dans $J =] \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x)[= \mathbb{R}$.
3. sh est une dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée ne s'annule par sur \mathbb{R} donc sa bijection réciproque argsh est également dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'(x) = (\text{sh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\text{sh}'[\text{argsh}(x)]} = \frac{1}{\text{ch}[\text{argsh}(x)]}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{2e^x \cdot 2e^{-x}}{4} = 1$$

Donc, $\text{ch}^2(x) = 1 + \text{sh}^2(x)$. Or, $\text{ch} > 0$ donc $\text{ch}(x) = \sqrt{1 + \text{sh}^2(x)}$.

En particulier, $\text{ch}(\text{argsh}(x)) = \sqrt{1 + \text{sh}^2(\text{argsh}(x))} = \sqrt{1 + x^2}$.

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\ &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x \\ &\Leftrightarrow X^2 - 2yX - 1 = 0 \text{ en posant } X = e^x \\ &\Leftrightarrow X = \frac{2y + \sqrt{4(y^2 + 1)}}{2} \text{ ou } X = \frac{2y - \sqrt{4(y^2 + 1)}}{2} < 0 \text{ donc impossible} \\ &\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}(x) = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} \arctan(x)$.

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} dans un intervalle J à déterminer.
3. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .
Déterminer cette unique solution.

4. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\arctan(u_n)}{2} \end{cases}$$

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
- En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$.
- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Correction

1. La fonction arctan est dérivable sur \mathbb{R} donc f est une fonction dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

2. $f' > 0$ donc la fonction f est strictement croissante et continue sur \mathbb{R} .

Par le théorème de la bijection, f est une bijection de \mathbb{R} dans $f(\mathbb{R}) = \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$.

3. La fonction f est une bijection de \mathbb{R} dans $f(\mathbb{R}) = \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$ et $0 \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$.

Donc, par définition d'une bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} . De plus, $f(0) = 0$ donc 0 est l'unique solution.

4. (a) On le fait par récurrence en utilisant la croissance de f .

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On va appliquer l'égalité des accroissements finis au segment $[0, u_n]$.

La fonction f est continue sur $[0, u_n]$, dérivable sur $]0, u_n[$.

Par l'égalité des accroissements finis, $\exists c_n \in]0, u_n[$ tel que $f'(c_n) = \frac{f(u_n) - f(0)}{u_n - 0} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc, } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}. \text{ Donc, } u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n.$$

(c) On le fait par récurrence.

(d) On a $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$.

Par passage à la limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 6 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = x - x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

- f est-elle continue en 0 ?
- f est-elle dérivable en 0 ? Est-elle dérivable sur \mathbb{R}_+ ?
Préciser f' sur son ensemble de définition.
- f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ ? De classe C^2 sur \mathbb{R}_+ ?

Correction

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0$ par croissance comparée.

Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. Donc, f est continue en 0.

2. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme et produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 - 2x \ln(x) - x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x \ln(x) = 1.$$

Donc f est également dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

$$\text{Finalement, } f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 - 2x \ln(x) - x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

3. On remarque que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 = f'(0)$. Donc, f' est continue en 0. De plus, f' est continue sur \mathbb{R}_+^* comme somme et produit de fonctions continues sur \mathbb{R}_+^* .

Donc, f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* comme somme et produit de fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(2)}(x) = -2 \ln(x) - 2 - 1 = -2 \ln(x) - 3.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \ln(x) - 1 = +\infty$. Donc, f' n'est pas dérivable en 0. Donc, f n'est pas de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 7 [*] Soit $\alpha \in]0, 1[$.

1. Soit $t \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $c \in]t, 1[$ tel que $\frac{t^\alpha - 1}{t - 1} = \alpha \cdot c^{\alpha-1}$.
2. En déduire que $\forall t \in]0, 1]$, $t^\alpha \leq \alpha(t - 1) + 1$.

Correction

1. Soit $t \in]0, 1[$.

La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $[t, 1]$ et dérivable sur $]t, 1[$.

Par le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]t, 1[$ tel que $f'(c) = \frac{f(t) - f(1)}{t - 1}$,

$$\text{donc } \alpha \cdot c^{\alpha-1} = \frac{t^\alpha - 1}{t - 1}.$$

2. Soit $c \in]0, 1[$ dont l'existence est assurée par la question précédente.

$c^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1) \ln(c)}$. Or, $\alpha - 1 < 0$ et $\ln(c) < 0$ donc $(\alpha - 1) \ln(c) > 0$. Donc, $c^{\alpha-1} > 1$.

Donc, $\frac{t^\alpha - 1}{t - 1} > \alpha$. Or, $t - 1 < 0$ donc $t^\alpha - 1 < \alpha(t - 1)$. Donc, $t^\alpha \leq \alpha(t - 1) + 1$.