

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur \mathbb{R} .

Correction Sur \mathbb{R}^* , la fonction f est un quotient de fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas donc f est continue sur \mathbb{R}^* .

En 0 : $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Or, $f(0) = 0$ donc f est continue en 0.

Finalement, f est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \\ \ln(|x|) & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur \mathbb{R} .

Correction Sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, la fonction f est un quotient de fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$. Or, $f(0) = 0$ donc f est continue en 0.

En -1 : $\lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(|x|) = 0$. Donc f n'est pas continue en -1.

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et discontinue en -1.

Exercice 3 Montrer que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle sur \mathbb{R} .

Correction Soit P un polynôme de degré impair.

On a donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$.

En particulier : $\exists A < 0$ tel que $\forall x \leq A, P(x) \leq -2$. Donc, $P(A) < 0$.

De même, $\exists B > 0$ tel que $\forall x \geq B, P(x) \geq 2$. Donc, $P(B) > 0$.

Le polynôme P est continue sur $[A, B]$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [A, B]$ tel que $P(c) = 0$.

Donc, P admet une racine réelle.

Exercice 4 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, continue sur $[a, b]$.

Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

Correction Soit $g : x \in [a, b] \rightarrow f(x) - x$.

g est continue sur $[a, b]$.

$g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \in [a, b]$.

$g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \in [a, b]$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in [a, b]$ tel que $g(\lambda) = 0$.

Donc, il existe $\lambda \in [a, b]$ tel que $f(\lambda) = \lambda$.

Exercice 5 Soit la fonction f définie sur $]0, 1[$ par $\forall x \in]0, 1[, f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0, 1[$.
2. Montrer que f est bijective de $]0, 1[$ dans un intervalle J à préciser.
On note f^{-1} sa bijection réciproque.

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Correction

1. On résout l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

2. On va montrer que la fonction f est une fonction continue et strictement monotone sur $]0; 1[$.

(a) **Continuité** : La fonction f est la somme de deux fonctions continue sur $]0; 1[$ comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

(b) **Stricte monotonie** : La fonction f est dérivable sur $]0; 1[$ et $\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x(x-1))^2}$.

Ce trinôme n'a pas de racines réelles donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0; 1[$.

La fonction f est donc $\text{une bijection de }]0; 1[\text{ dans } f(]0; 1[) =] \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] =] -\infty; +\infty [$.

3. On n'a pas besoin de l'expression de f^{-1} pour déterminer la limite, seulement de la continuité de f^{-1} . Or, la fonction f est continue sur $]0; 1[$ donc la bijection réciproque f^{-1} est continue sur \mathbb{R} .

En particulier, $\lim_{y \rightarrow 0} f^{-1}(y) = f^{-1}(0)$.

Par composition de limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = f^{-1}(0)$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x)^2.$$

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer les seules valeurs possibles pour $f(y)$.
2. En déduire les seules valeurs fonctions f possibles.

Correction

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. $f(y)$ est solution de l'équation $X = X^2$. Donc, $f(y) = 1$ ou $f(y) = 0$.

2. Puisque la fonction f est continue, elle vaut tout le temps 0 ou tout le temps 1. Donc, les seules fonctions solutions sont les fonctions constantes égales à 0 ou à 1.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante sur \mathbb{R} .

Correction

1. On va le démontrer par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

I : Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = f\left(\frac{x}{1}\right) = f\left(\frac{x}{2^0}\right)$. La propriété est vraie au rang 0.

H : Supposons qu’il existe un entier $n \geq 0$ tel que $P(n)$ soit vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{x}{2}}{2^n}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ par hypothèse de récurrence appliquée à $\frac{x}{2}$.

Or, $f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f(x)$ par hypothèse sur f donc on a bien $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x)$.

C : Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s’intéresse à la suite $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite est une suite constante égale à $f(x)$ par la question précédente.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et la fonction f est continue en 0. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$.

Par unicité de la limite, $f(x) = f(0)$. Ceci est vrai pour tous les réels donc la fonction f est constante sur \mathbb{R} .

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -x^2 + x \ln x + 2$.

1. Justifier que f est continue sur \mathbb{R}_+^* . Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Dresser le tableau de variation de f (on pourra calculer les dérivées f' et f''). Préciser les limites en 0 et $+\infty$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle que l’on précisera.
4. Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque f^{-1} . Indiquer les limites.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier qu’il existe un unique réel strictement positif x_k tel que $f(x_k) = -k$. Exprimer x_k à l’aide de la fonction f^{-1} .
6. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et déterminer sa limite.
7. Déterminer un équivalent de x_k en $+\infty$.

Correction

1. La fonction f est une somme de produit de fonctions continues sur \mathbb{R}_+^* donc la fonction f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$.

Donc, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$.

2. La fonction f est une somme de produit de fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R}_+^* donc f est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = -2x + \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = -2x + \ln(x) + 1 \text{ et } f''(x) = -2 + \frac{1}{x}$$

On étudie le signe de f'' . $\forall x > 0, f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Donc, f' est croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		+	-
$f'(x)$		$\nearrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) \searrow$	

De plus, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ donc f' est négative sur \mathbb{R}_+^* .

Donc, la fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$		2	$-\infty$

De plus, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

- La fonction f est continue et strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $f(\mathbb{R}_+^*) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)[=]-\infty, 2[$.
- La bijection réciproque f^{-1} est définie sur $] -\infty, 2[$, à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et elle a la même monotonie que f .

x	$-\infty$		2
$(f^{-1})'(x)$		-	-
$f^{-1}(x)$		$+\infty$	0^+

- Soit $k \in \mathbb{N}$. $-k \in f(\mathbb{R}_+^*)$ et f est bijective donc $-k$ admet un unique antécédent dans \mathbb{R}_+^* par f .
Donc, $\boxed{\text{il existe un unique réel strictement positif } x_k \text{ tel que } f(x_k) = -k}$. On a $\boxed{x_k = f^{-1}(-k)}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$.
 $-(k+1) < -k$ donc $f^{-1}(-(k+1)) > f^{-1}(-k)$ car f^{-1} est décroissante sur $] -\infty, 2[$.
Donc, $x_{k+1} > x_k$.
Donc, $\boxed{\text{la suite } (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.

$\lim_{k \rightarrow +\infty} -k = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} f^{-1}(-k) = +\infty}$

- On sait que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2$. Or, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$ donc, par substitution, $f(x_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -x_k^2$.
Finalement, $-k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -x_k^2$. Donc, $\boxed{x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{k}}$.

Correction

Exercice 9 Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $h(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

- Est-elle prolongeable par continuité en 0 à gauche ?
- Est-elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?
- Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Correction

- On calcule les limites à gauche et à droite de 0.

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \frac{\pi}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Les limites à gauche et à droite ne sont pas les mêmes donc $\boxed{h \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0}$.

2. Cette équation est définie sur \mathbb{R} car la fonction arctangente est définie sur \mathbb{R} .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(E) : \arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ \tan(\arctan(x) + \arctan(2x)) = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

$$(E) \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(2x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(2x))} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{x + 2x}{1 - 2x^2} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ 3x = 1 - 2x^2 \\ 1 - 2x^2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ 2x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ (trinôme)} \\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } x \neq \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

On résout le trinôme. On trouve deux racines réelles $\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ et $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$. Ces deux racines étant différentes de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$(E) \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \text{ ou } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Or :

• $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4} < 0$ et la fonction arctangente est négative sur \mathbb{R}_- , donc si $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$, alors $\arctan(x) + \arctan(2x) \leq 0$, n'appartient donc pas à l'ensemble $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$ n'est pas solution de (E).

• $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$ donc $4 < \sqrt{17} < 5$, donc $\frac{1}{4} < \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} < \frac{1}{2}$. En particulier, on a : $0 < \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} < 1$ et $0 < 2 \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} < 1$. Donc, puisque la fonction arctangente est strictement croissante sur \mathbb{R} , et puisque $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$,

si $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$, on a $0 < \arctan(x) < \frac{\pi}{4}$ et $0 < \arctan(2x) < \frac{\pi}{4}$, donc $\arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$(E) \iff x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc le singleton : $S = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$.

Exercice 10 [*] Soit f une fonction continue et périodique sur \mathbb{R} .

Montrer que f est bornée sur \mathbb{R} .

Correction Notons T une période de f . On a donc $f(\mathbb{R}) = f([0; T])$.

La fonction f est continue sur le segment $[0, T]$ donc elle y est bornée.

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, T], |f(x)| \leq M$.

Donc, $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$. Donc, f est bornée sur \mathbb{R} .

Exercice 11 [*]

1. Résoudre $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

Indication : Sur le bon ensemble, $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Correction

1. Cette équation est définie sur \mathbb{R} car la fonction arctangente est définie sur \mathbb{R} .
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(E) : \arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \tan(\arctan(x) + \arctan(2x)) = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

$$(E) \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(2x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(2x))} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \frac{x + 2x}{1 - 2x^2} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ 3x = 1 - 2x^2 \\ 1 - 2x^2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ 2x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ (trinôme)} \\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } x \neq \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

On résout le trinôme. On trouve deux racines réelles $\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ et $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$. Ces deux racines étant différentes de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$(E) \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \text{ ou } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Or :

- $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4} < 0$ et la fonction arctangente est négative sur \mathbb{R}_- , donc si $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$, alors $\arctan(x) + \arctan(2x) \leq 0$, n’appartient donc pas à l’ensemble $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$ n’est pas solution de (E).

- $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$ donc $4 < \sqrt{17} < 5$, donc $\frac{1}{4} < \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} < \frac{1}{2}$. En particulier, on a : $0 < \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} < 1$ et $0 < 2 \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} < 1$. Donc, puisque la fonction arctangente est strictement croissante sur \mathbb{R} , et puisque $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$,

si $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$, on a $0 < \arctan(x) < \frac{\pi}{4}$ et $0 < \arctan(2x) < \frac{\pi}{4}$, donc $\arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$(E) \iff x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

L’ensemble des solutions de (E) est donc le singleton : $S = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$.

2. Notons $f : x \rightarrow \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme composée et somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Donc, f est constante sur \mathbb{R}_+^* .

$$f(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}. \text{ Donc, } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$