<u>Exercice 1</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 2</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin(x) \text{ si } x \geq 0 \\ x \text{ si } -1 < x < 0 \\ \ln(|x|) \text{ si } x \leq -1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 3</u> Montrer que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 4</u> Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$, continue sur $[a,b]$.
Montrer que f admet une point fixe dans $[a,b]$.

<u>Exercice 5</u> Soit la fonction f définie sur $]0,1[$ par $\forall x \in]0,1[\ ,\ f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0,1[$.
2. Montrer que f est bijective de $]0,1[$ dans un intervalle J à préciser.
   On note f^{-1} sa bijection réciproque.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

<u>Exercice 6</u> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x)^2.$$

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer les seules valeurs possibles pour $f(y)$.
2. En déduire les seules valeurs fonctions f possibles.

<u>Exercice 7</u> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 8</u> Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + x\ln x + 2$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Dresser le tableau de variation de f (on pourra calculer les dérivées f' et f''). Préciser les limites en 0 et $+\infty$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
4. Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque f^{-1}. Indiquer les limites.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un unique réel strictement positif x_k tel que $f(x_k) = -k$.
   Exprimer x_k à l'aide de la fonction f^{-1}.
6. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et déterminer sa limite.
7. Déterminer un équivalent de x_k en $+\infty$.

Exercice 9 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Est-elle prolongeable par continuité en 0 à gauche ?
2. Est-elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?
3. Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 10 [∗] Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 [∗]

1. Résoudre $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

   Indication : Sur le bon ensemble, $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.