

Chapitre 22 : Continuité sur un intervalle

Table des matières

1	Continuité locale et globale d'une fonction.	2
1.1	Rappels : continuité en un point.	2
1.2	Continuité globale d'une fonction	3
2	Applications de la continuité globale.	3
2.1	Théorème des valeurs intermédiaires.	3
2.2	Continuité sur un intervalle	4
2.3	Théorème de la bijection	5
2.4	Fonctions tangente et arctangente	5

1 Continuité locale et globale d'une fonction.

1.1 Rappels : continuité en un point.

Définition 1.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
La fonction f est continue en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Lorsque f n'admet pas de limite finie en a , on dit que f est discontinue en a .

Définition 2.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
La fonction f est continue à gauche en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.
La fonction f est continue à droite en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Théorème 3.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
 f est continue en a si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a .

Définition 4.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} de la forme $I =]a, b[$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est prolongeable par continuité en a lorsque f admet une limite à droite finie en a , notée ℓ .

Le prolongement est définie de la façon suivante :

$$\tilde{f}_a : \begin{cases} [a, b[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ pour } x \in]a, b[\\ \ell \text{ pour } x = a \end{cases} \end{cases}$$

On dit que f est prolongeable par continuité en b lorsque f admet une limite à gauche finie en b , notée ℓ' .

Le prolongement est définie de la façon suivante :

$$\tilde{f}_b : \begin{cases}]a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ pour } x \in]a, b[\\ \ell' \text{ pour } x = b \end{cases} \end{cases}$$

1.2 Continuité globale d'une fonction

Définition 5.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point de I .

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonction définies et continues sur I , à valeurs dans \mathbb{R} .

Théorème 6.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in I$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues sur I alors :

1. pour tout couple de réels (λ, μ) , la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur I .
2. La fonction fg est continue sur I .
3. Si $g \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Exemple 7. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

Cette fonction est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Théorème 8.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et soit $a \in I$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$.

Si f est continue sur I et si g est continue sur $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .

Exemple 9. Soit $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$.

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . Cette fonction est-elle continue sur D_f ?

Si non, sur quel ensemble est-elle continue ?

2 Applications de la continuité globale.

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 10 (Version 1).

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.

Si $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple 11. Soit $f : x \mapsto x + e^{-3x}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Exemple 12. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, continue sur $[0, 1]$.

Montrer que f admet un point fixe.

Exemple 13. Ecrire une fonction python qui prend en entrée

- deux réels a et b
- une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) \leq 0$.
- un paramètre ϵ .

et qui renvoie une valeur approchée à ϵ près d'une solution de $f(x) = 0$.

Théorème 14 (Version générale).

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I .

Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$.

Pour tous les réels λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Remarque 15. Il n'y a pas unicité de l'antécédent.

2.2 Continuité sur un intervalle

Théorème 16 (Continuité sur un intervalle.).

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I .

Alors $f(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

Remarque 17. On détermine la forme de l'intervalle $f(I)$ à l'aide du tableau de variation de f .

Théorème 18 (Continuité et monotonie.).

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I .

1. Si f est croissante sur I ,

2. Si f est décroissante sur I ,

$$\bullet I = [a, b] \Rightarrow f(I) = [f(a), f(b)].$$

$$\bullet I = [a, b] \Rightarrow f(I) = [f(b), f(a)].$$

$$\bullet I =]a, b] \Rightarrow f(I) =] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)].$$

$$\bullet I =]a, b] \Rightarrow f(I) = [f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[.$$

$$\bullet I = [a, b[\Rightarrow f(I) = [f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[.$$

$$\bullet I = [a, b[\Rightarrow f(I) =] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)].$$

$$\bullet I =]a, b[\Rightarrow f(I) =] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[.$$

$$\bullet I =]a, b[\Rightarrow f(I) =] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[.$$

Exemple 19. Soit $f : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$. Déterminer $f(]0, +\infty[)$.

Théorème 20 (Continuité sur un segment.).

Soient $I = [a, b]$ un segment de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I .

Alors, $f(I)$ est un segment dont les bornes sont des images par f .

$$\exists (c, d) \in [a, b]^2 \text{ tels que } f([a, b]) = [f(c), f(d)]$$

Toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.

Exemple 21. Soit la fonction cosinus étudiée sur $[0, 2\pi]$. Alors, $\cos([0, 2\pi]) = [\cos(\pi), \cos(0)]$.

2.3 Théorème de la bijection

Définition 22.

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application **bijjective** de E dans F .

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$$

On appelle bijection réciproque de f l'application de F dans E qui à tout élément de F associe son unique antécédent. On la note f^{-1} .

$$\forall (x, y) \in E \times F, y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y).$$

Théorème 23.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f est une bijection de I dans $f(I)$ (qui est un intervalle) et sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et de même monotonie que f .

Exemple 24. Soit f une fonction bijjective et croissante de $[0, 1]$ dans $[2, 3]$.

Déterminer le tableau de variations de la bijection réciproque f^{-1} .

2.4 Fonctions tangente et arctangente

Théorème 25.

La fonction \tan est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans \mathbb{R} .

Définition 26.

On appelle fonction arctangente la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction \arctan est définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

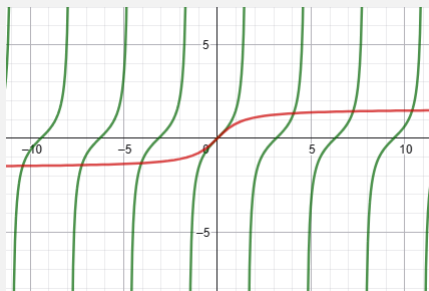
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) &= x \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) &= x \end{aligned}$$

Exemple 27.

- $\arctan(-1) =$
- $\arctan(1) =$
- $\arctan(\tan(0)) =$
- $\arctan(\tan(\pi)) =$
- $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

Théorème 28.

1. La fonction arctan est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. La fonction arctan est impaire.

**Exercice 1.**

1. Montrer que la fonction arctan est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de arctan.