Exercice 1 Parmi les espaces suivants, lesquels sont des sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$?

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y = 0\}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y = 1\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 2x + y - z = 0\}$
4. $F = \{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\}$
5. $F = \{(x, y, y - x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
6. $F = \{(x, y, 3), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 2

1. Ecrivez les ensembles suivants comme des sous−espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs à déterminer. (on parlera de famille génératrice)
   (a) Dans $E = \mathbb{R}^3$: $H = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
   (b) Dans $E = \mathbb{R}^n$: $G = \{(a, \ldots, a) \in \mathbb{R}^n \ , \ a \in \mathbb{R}\}$
   (c) Dans $E = \mathbb{R}^3$: $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y - z = 0\}$
2. Déterminer $H \cap R$. Est-ce un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 Soit $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.\right\}$.
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^4$, on note $\overrightarrow{e_1} = (1, -1, 1, 2)$ et $\overrightarrow{e_2} = (-1, 2, 3, 1)$

1. Exprimer $\text{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sous forme d'ensemble.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\overrightarrow{u} = (-2, x, y, 3)$.
   A quelle condition sur (x, y) est-ce que u est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}$ et de $\overrightarrow{e_2}$?

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\overrightarrow{e_1} = (1, -1, -2), \overrightarrow{e_2} = (-1, 2, 3), \overrightarrow{e_3} = (3, -4, -1)$ et $\overrightarrow{e_4} = (-2, 5, -11)$.

1. Exprimer $\text{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sous forme d'ensemble.
2. Montrer que $\text{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})=\text{Vect}(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$.

Exercice 6 Reprendre les quatre ensembles de l'exercice 2 et en donner une base.

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Comparer (en terme d'inclusion) les ensembles suivants : $\text{Vect}((\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $\text{Vect}((\overrightarrow{u})$ et $\text{Vect}((\overrightarrow{u}, \lambda.\overrightarrow{u})$.

Exercice 8 Les familles suivantes sont-elles des familles libres de $\mathbb{R}^3$?

1. $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (1, 2, 2)$.
2. $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (1, 1, 1)$.
3. $\overrightarrow{e_1} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (2, -1, 3)$ et $\overrightarrow{e_3} = (-1, 1, -1)$.
4. $\overrightarrow{e_1} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (2, 1, -1)$ et $\overrightarrow{e_3} = (1, -1, -2)$.

Exercice 9 Soit $k \in \mathbb{R}$. Soient $\overrightarrow{e_1} = (1, k, 2)$, $\overrightarrow{e_2} = (-1, 8, k)$ et $\overrightarrow{e_3} = (1, 2, 1)$.
Déterminez les valeurs de k pour lesquelles la famille est libre.

Exercice 10 Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de $\mathbb{R}^3$?

1. $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$
2. $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 2)$.
3. $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (1, 1, 1)$.
4. $\overrightarrow{e_1} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{e_3} = (1, 1, 0)$.

Exercice 11 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\overrightarrow{e_1} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0,1,1)$.

1. Rappeler la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} = (8,4,2)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 12

1. Montrer que la famille $(\overrightarrow{e_1} = (2,1,1), \overrightarrow{e_2} = (1,4,3), \overrightarrow{e_3} = (0,1,1), \overrightarrow{e_4} = (1,2,3))$ forme une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Est-elle libre ?
3. Proposer une base de $\mathbb{R}^3$ extraite de la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$.