

Chapitre 25 : Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . (prof)

Table des matières

1	Structure de \mathbb{R}^n.	2
1.1	Définition.	2
1.2	Règles de calculs sur \mathbb{R}^n	2
1.3	Stabilité par combinaison linéaire.	3
2	Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n.	4
2.1	Définitions.	4
2.2	Sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs.	5
2.3	Stabilité par combinaisons linéaires.	6
2.4	Intersection de sous-espaces vectoriels	6
3	Familles de vecteurs dans un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n.	7
3.1	Familles liées, familles libres.	7
3.2	Familles génératrices d'un sous-espace vectoriel.	9
3.3	Bases d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n	10
3.4	Coordonnées dans une base.	10
4	Autres exemples de sous-espaces vectoriels.	12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé dans tout le chapitre.

1 Structure de \mathbb{R}^n .

1.1 Définition.

Définition 1.

On note \mathbb{R}^n l'ensemble des n -uplets formés de réels

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in \mathbb{R} \}$$

Les éléments de \mathbb{R}^n sont appelés **vecteurs de \mathbb{R}^n** .

On appelle **vecteur nul de \mathbb{R}^n** le vecteur défini par $\vec{0}_n = (0, \dots, 0)$.

Définition 2 (Opérations sur \mathbb{R}^n).

Soient $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{v} = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On définit le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ comme l'unique vecteur $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.
2. On définit le vecteur $\lambda \cdot \vec{u}$ comme l'unique vecteur $(\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$.

Théorème 3 (Stabilité des opérations.).

- **Stabilité par addition** : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
- **Stabilité par multiplication par un scalaire** : $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot \vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

1.2 Règles de calculs sur \mathbb{R}^n .

Théorème 4 (Pour l'addition.).

La loi $+$ sur \mathbb{R}^n a les propriétés suivantes.

- **Commutativité** : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- **Associativité** : $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^n)^3, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- **Élément neutre** : $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \vec{u} + \vec{0}_n = \vec{u}$.

Démonstration :

- Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = y + x$$

donc la loi $+$ est commutative sur \mathbb{R}^n .

- Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ et $z = (z_1, \dots, z_n)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^n .

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, \dots, z_n) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \\ &= x + (y + z) \end{aligned}$$

donc la loi $+$ est associative.

- Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n .

$$x + 0_{\mathbb{R}^n} = (x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0) = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = x$$

donc $0_{\mathbb{R}^n}$ est un élément neutre pour l'addition. ■

Théorème 5 (Pour la multiplication par un scalaire).

La loi $+$ et la loi \cdot sur \mathbb{R}^n ont les propriétés suivantes.

- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}_n$ et $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.
- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_n \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$.
- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}$ et $\lambda(\mu \vec{u}) = (\lambda\mu) \vec{u}$.
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$.

Démonstration :

- Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x + y) &= \lambda \cdot (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) \\ &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) \\ &= \lambda x + \lambda y \end{aligned}$$

- Idem
- Idem
- Idem

1.3 Stabilité par combinaison linéaire.

Définition 6 (Combinaison linéaire de 2 vecteurs.).

Soient \vec{e}_1 et \vec{e}_2 deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

On appelle combinaison linéaire de la famille (\vec{e}_1, \vec{e}_2) tout vecteur \vec{x} de la forme

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7. $(1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (0, 1, -1)$ donc $(1, 1, 1)$ est une combinaison linéaire de $(1, 0, 2)$ et de $(0, 1, -1)$.

Exemple 8. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$(\lambda, \mu, -\lambda + \mu) = (\lambda, 0, -\lambda) + (0, \mu, \mu) = \lambda \cdot (1, 0, -1) + \mu \cdot (0, 1, 1)$. Donc, $(\lambda, \mu, -\lambda + \mu)$ est une combinaison linéaire de $(1, 0, -1)$ et de $(0, 1, 1)$.

Définition 9.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $F = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille de p vecteurs de \mathbb{R}^n .

On appelle combinaison linéaire de la famille F tout vecteur \vec{x} de la forme

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{e}_k = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{e}_p \text{ avec } \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Théorème 10 (Stabilité par combinaison linéaire).

Toutes les combinaisons linéaires formées à partir de vecteurs de \mathbb{R}^n sont des vecteurs de \mathbb{R}^n .
On dit alors que \mathbb{R}^n est stable par combinaison linéaire.

Démonstration :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $F = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille de p vecteurs de \mathbb{R}^n . Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{e}_k = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + \underbrace{\lambda_{p-1} \cdot \vec{e}_{p-1}}_{\in \mathbb{R}^n} + \underbrace{\lambda_p \cdot \vec{e}_p}_{\in \mathbb{R}^n}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Finalement, $\sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{e}_k \in \mathbb{R}^n$. ■

Remarque 11. On a déjà rencontré des ensembles possédant cette stabilité par combinaison linéaire.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

2 Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

2.1 Définitions.

Définition 12.

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n signifie que

1. $\vec{0}_n \in F$,
2. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in F$.

Exemple 13. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + 2y + 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

On va appliquer la définition 10.

- $0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$. Donc, F est non vide.
- On montre la stabilité par combinaison linéaire de deux vecteurs.
Soit $(x, y) \in F^2$. $\exists (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^6$ tel que $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot y = (\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot y_1, \lambda_1 \cdot x_2 + \lambda_2 \cdot y_2, \lambda_1 \cdot x_3 + \lambda_2 \cdot y_3)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot y_1 + 2(\lambda_1 \cdot x_2 + \lambda_2 \cdot y_2) + 3(\lambda_1 \cdot x_3 + \lambda_2 \cdot y_3) &= \lambda_1 \cdot x_1 + 2\lambda_1 \cdot x_2 + 3\lambda_1 \cdot x_3 + \lambda_2 \cdot y_1 + 2\lambda_2 \cdot y_2 + 3\lambda_2 \cdot y_3 \\ &= \lambda_1 \underbrace{(x_1 + 2x_2 + 3x_3)}_{=0 \text{ car } x \in F} + \lambda_2 \underbrace{(y_1 + 2y_2 + 3y_3)}_{=0 \text{ car } y \in F} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $\lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot y \in F$.

Donc, F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exemple 14. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + 2y + 3z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

- $0 + 2.0 + 3.0 = 0$ et $0 - 0 + 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$. Donc, F est non vide.
- Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$. $\exists (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^6$ tel que $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

On a $\lambda_1.x + \lambda_2.y = (\lambda_1.x_1 + \lambda_2.y_1, \lambda_1.x_2 + \lambda_2.y_2, \lambda_1.x_3 + \lambda_2.y_3)$.

$$\begin{aligned} \lambda_1.x_1 + \lambda_2.y_1 + 2(\lambda_1.x_2 + \lambda_2.y_2) + 3(\lambda_1.x_3 + \lambda_2.y_3) &= \lambda_1.x_1 + 2\lambda_1.x_2 + 3\lambda_1.x_3 + \lambda_2.y_1 + 2\lambda_2.y_2 + 3\lambda_2.y_3 \\ &= \lambda_1 \underbrace{(x_1 + 2.x_2 + 3x_3)}_{=0 \text{ car } x \in F} + \lambda_2 \underbrace{(y_1 + 2y_2 + 3y_3)}_{=0 \text{ car } y \in F} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1.x_1 + \lambda_2.y_1 - (\lambda_1.x_2 + \lambda_2.y_2) + (\lambda_1.x_3 + \lambda_2.y_3) &= \lambda_1 \underbrace{(x_1 - x_2 + x_3)}_{=0 \text{ car } x \in F} + \lambda_2 \underbrace{(y_1 - y_2 + y_3)}_{=0 \text{ car } y \in F} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $\lambda_1.x + \lambda_2.y \in F$.

Donc, F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exemple 15. Soit $F = \{(a, b, a + b, 0), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

2.2 Sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs.

Définition 16.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille finie de vecteurs de \mathbb{R}^n .

On appelle espace vectoriel engendré par la famille \mathcal{F} , et on note $\text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$, l'ensemble

$$\text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot \vec{e}_i, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

C'est l'ensemble contenant toutes les combinaisons linéaires formée à partir des vecteurs $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$.

Exemple 17. Déterminer $\text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 1))$.

$$\text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 1)) = \{ \lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 1), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \} = \{ (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Exemple 18. Soit $F = \{(x, z, -x + y + z, y), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$. Montrer que $F = \text{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0))$.

Théorème 19.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille finie de vecteurs de \mathbb{R}^n .

$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Démonstration : Notons $F = \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot e_i, \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$. On va vérifier la définition 10.

- $0_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^p 0 \cdot e_i$ donc $0_{\mathbb{R}^n} \in F$.

- Soit $(x, y) \in F^2$. Donc, $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{2p}$ tel que $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot e_i$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y = \lambda_1 \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot e_i + \lambda_2 \cdot \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^p \underbrace{(\lambda_1 \cdot \alpha_i + \lambda_2 \cdot \beta_i)}_{\in \mathbb{R}} \cdot e_i$$

donc $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in F$.
Par le théorème 4, F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . ■

Exemple 20. Montrer que $F = \{(x, y, -x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

On va l'écrire sous forme de sous-espace vectoriel engendré par une famille.

$$\{(x, y, -x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Donc, $\{(x, y, -x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 0))$. Donc, c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

2.3 Stabilité par combinaisons linéaires.

Théorème 21.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
Toutes les combinaisons linéaires formées à partir de vecteurs de F sont des vecteurs de F .
On dit que F est stable par combinaison linéaire.

Démonstration :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $F = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille de p vecteurs de F . Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{e}_k = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + \underbrace{\lambda_{p-1} \cdot \vec{e}_{p-1}}_{\in F} + \underbrace{\lambda_p \cdot \vec{e}_p}_{\in F}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in F}$$

Finalement, $\sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{e}_k \in F$. ■

2.4 Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème 22 (Intersection de deux sous-espaces vectoriels).

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .
Alors, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Démonstration : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

- $F \cap G \subset \mathbb{R}^n$.
- Par la définition 9, $0_{\mathbb{R}^n} \in F$ et $0_{\mathbb{R}^n} \in G$ donc $0_{\mathbb{R}^n} \in F \cap G$. Donc $F \cap G$ est non vide.
- Soit $(x, y) \in (F \cap G)^2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
 $(x, y) \in F^2$ donc, par la définition 9, $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in F$. De même, $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in G$.
Donc, $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in F \cap G$.

Donc, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . ■

Exemple 23. L'intersection de deux plans de \mathbb{R}^3 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Théorème 24 (Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .
Alors, $\bigcap_{k=1}^p F_k$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Démonstration : C'est une généralisation du théorème 20.

On le démontre par récurrence. ■

Remarque 25. En général, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

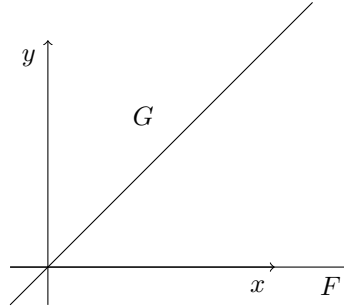
Soient $F = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 .

$F = \{x(1, 0), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0))$ donc c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

$G = \{x(1, 1), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1))$ donc c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

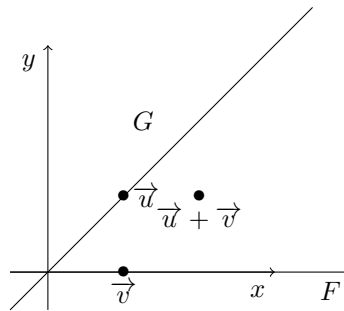
2. Représenter (rapidement) $F \cup G$.



3. Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . On pourra s'aider d'un dessin.

On va montrer que $F \cup G$ n'est pas stable par addition.

Soit $\vec{u} = (1, 1)$. Soit $\vec{v} = (1, 0)$. On a bien $(\vec{u}, \vec{v}) \in (F \cup G)^2$.



Or, $\vec{u} + \vec{v} = (2, 1) \notin F \cup G$. Donc, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

3 Familles de vecteurs dans un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Exemple 26. Montrer que $\text{Vect}((1, 1, 1), (-2, -2, -2)) = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

$$\begin{aligned} \text{Vect}((1, 1, 1), (-2, -2, -2)) &= \{\lambda_1 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (-2, -2, -2), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(\lambda_1 - 2\lambda_2, \lambda_1 - 2\lambda_2, \lambda_1 - 2\lambda_2), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda_1 - 2\lambda_2)(1, 1, 1), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 1)). \end{aligned}$$

Exemple 27. Exprimer plus simplement $\text{Vect}((1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, -1, -2))$.

3.1 Familles liées, familles libres.

Définition 28.

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille finie de vecteurs de \mathbb{R}^n .

- On dit que la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est liée lorsque un des vecteurs de la famille peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.
- On dit que la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est libre lorsqu'elle n'est pas liée.

Exemple 29. Dans \mathbb{R}^3 , on pose $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (3, 4, 0)$ et $\vec{w} = (5, 7, 5)$.
Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée.

On remarque que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ donc la famille est liée.

Théorème 30 (Caractérisation d'une famille liée).

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille finie de vecteurs de \mathbb{R}^n . On a équivalence entre

1. La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est liée.
2. $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot \vec{e}_k = \vec{0}_n$.

Démonstration : On raisonne par double implication.

$1 \Rightarrow 2$: On suppose que la famille est liée.

Donc, $\exists i_0 \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{i_0-1}, \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tel que $e_{i_0} = \sum_{k \neq i_0} \lambda_k \cdot e_k$.

Donc, $\sum_{k=1}^{i_0-1} \lambda_k \cdot e_k - e_{i_0} + \sum_{k=i_0+1}^p \lambda_k \cdot e_k = 0$.

La proposition 2 est vraie avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i_0-1}, -1, \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_p)$.

$2 \Rightarrow 1$: On suppose qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot e_k = 0$.

$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0) \Rightarrow \exists i_0 \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\lambda_{i_0} \neq 0$.

Donc, $\lambda_{i_0} e_{i_0} = - \sum_{k \neq i_0} \lambda_k \cdot e_k$. Donc, $e_{i_0} = \sum_{k \neq i_0} \frac{-\lambda_k}{\lambda_{i_0}} \cdot e_k$.

Donc, la famille est liée. ■

Remarque 31. Pour montrer qu'une famille est liée, on doit déterminer les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.
On raisonne souvent par analyse et synthèse.

Théorème 32 (Caractérisation d'une famille libre).

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille finie de vecteurs de \mathbb{R}^n . On a équivalence entre

1. La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est libre.
2. $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, $\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot \vec{e}_k = \vec{0}_n \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_k = 0 \right)$.

La seule combinaison des vecteurs de la famille qui donne le vecteur nul est celle formée avec tous les coefficients nuls.

Démonstration : C'est la négation du théorème précédent. ■

Exemple 33. Dans \mathbb{R}^3 , on note $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, 2)$ et $\vec{w} = (2, 3, 1)$.
Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

On va appliquer la caractérisation de la liberté (théorème 30).

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v} + \lambda_3 \cdot \vec{w} = \vec{0}_3$.

$$\text{Donc } \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} .$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -7\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases} .$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 18\lambda_2 = 0 \end{cases} .$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} .$$

Donc la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est donc libre.

Exemple 34. Soient $\vec{u} = (0, 2, 3)$ et $\vec{v} = (1, 0, 3)$. Montrer que (\vec{u}, \vec{v}) est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

Les vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de \mathbb{R}^3 .

Remarque 35. Pour montrer qu'une famille est libre, on devra souvent résoudre un système.

3.2 Familles génératrices d'un sous-espace vectoriel.

Définition 36.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille finie de F .
On dit que la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est génératrice de F lorsque $F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$.

$$\forall \vec{x} \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } \vec{x} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot \vec{e}_k$$

Tout vecteur de F est une combinaison linéaire de la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$.

Exemple 37. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0) + y(0, 1), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0), (0, 1))$.

Donc, la famille $((1, 0), (0, 1))$ est génératrice de \mathbb{R}^2 .

Exemple 38. La famille $(\vec{e}_1 = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1))$ est génératrice de \mathbb{R}^n .

Exemple 39. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + z = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et en donner une famille génératrice.

$F = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 0))$ donc F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et $(1, 0, -1), (0, 1, 0)$ est une famille génératrice de F .

Exemple 40. Montrer que la famille $\mathcal{D} = ((1, 1, 1), (0, 1, 1))$ n'est pas génératrice de \mathbb{R}^3 .

On va proposer un vecteur de \mathbb{R}^3 qui ne s'écrit pas comme combinaisons linéaires de $(1, 1, 1)$ et de $(0, 1, 1)$.

On suppose par l'absurde que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1, 1, 1), (0, 1, 1))$.

Donc, $\mathbb{R}^3 = \{(x, x + y, x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

$(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ et $(1, 0, 0) \notin \{(x, x + y, x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Absurde

Donc, la famille $((1, 1, 1), (0, 1, 1))$ n'est pas génératrice de \mathbb{R}^3 .

Exemple 41. Soit le système $\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$.

Notons F l'ensemble des solutions de ce système. Déterminer une famille génératrice de F .

On va l'écrire sous forme de sous-espace vectoriel engendré par une famille.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ -3y + t + 4z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x = 2y + 4z = \frac{-2t + 4z}{3} \\ y = \frac{-t - 4z}{3} \end{cases}$$

Donc, $F = \left\{ \left(\frac{-2t + 4z}{3}, \frac{-t - 4z}{3}, z, t \right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ t \left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, 0, 1 \right) + z \left(\frac{4}{3}, \frac{-4}{3}, 1, 0 \right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Donc, $F = \text{Vect} \left(\left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, 0, 1 \right), \left(\frac{4}{3}, \frac{-4}{3}, 1, 0 \right) \right)$.

La famille $\left(\left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, 0, 1 \right), \left(\frac{4}{3}, \frac{-4}{3}, 1, 0 \right) \right)$ est génératrice de F .

3.3 Bases d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Définition 42.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille finie de F .
On dit que la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est une base de F lorsque elle est génératrice de F et libre.

Exemple 43. La famille $((1, 0), (0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^2 . On l'appelle *la base canonique* de \mathbb{R}^2 .

On a déjà montré qu'elle était génératrice de \mathbb{R}^2 . Étudions sa liberté.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (0, 0)$.

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc la famille est libre. C'est une base de \mathbb{R}^2 .

Exemple 44. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + y + z + t = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en déterminer une base.

On va l'écrire comme un sous-espace vectoriel engendré par une famille.

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = -y - z - t\} = \{(-y - z - t, y, z, t), (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}$.

Donc, $F = \text{Vect}((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$.

C'est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et la famille $((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ est une famille génératrice de F .

Montrons qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(-1, 1, 0, 0) + \lambda_2(-1, 0, 1, 0) + \lambda_3(-1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc la famille est libre. C'est une base de F .

Théorème 45 (Existence de bases, ADMIS).

Tous les sous-espaces vectoriels non vides de \mathbb{R}^n admettent des bases.

3.4 Coordonnées dans une base.

Théorème 46.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de F .

Alors, tout vecteur de F s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$.

$$\forall \vec{x} \in F, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \vec{x} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot \vec{e}_k$$

Démonstration : Soit (e_1, \dots, e_p) une base de E . Soit $x \in E$.

- **Existence** : La famille (e_1, \dots, e_p) est une base de E . En particulier, elle est génératrice de E .

Donc, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot e_k$.

- **Unicité** : Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{2p}$ tel que $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^p \beta_k \cdot e_k$.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^p (\lambda_k - \beta_k) \cdot e_k = 0_E$. Or, la famille (e_1, \dots, e_p) est libre.

Donc, $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\lambda_k - \beta_k = 0$.

Donc, $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\lambda_k = \beta_k$.

Il y a bien unicité de l'écriture. ■

Remarque 47. génératrice \rightarrow existence et libre \rightarrow unicité.

Définition 48.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de F .

On appelle coordonnées de $\vec{x} \in F$ dans la base \mathcal{B} les **uniques** coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$

tels que $\vec{x} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot \vec{e}_k$.

On appelle matrice de \vec{x} dans la base \mathcal{B} la matrice colonne contenant les coordonnées dans la base \mathcal{B} .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Remarque 49. Cela étend la définition de coordonnées rencontrée pour les vecteurs de \mathbb{R}^2 .

Remarque 50. Soit $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Au lieu d'écrire "soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ", on devrait écrire "soit u un vecteur de \mathbb{R}^3 dont les coordonnées dans la base canonique sont (x, y, z) ".

Exemple 51. Soit $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1))$. Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer les coordonnées dans cette base de $\vec{u} = (4, 5, 3)$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc la famille est libre.

On va raisonner par analyse-synthèse pour montrer qu'elle est génératrice. Soit $\vec{x} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

A : Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (a, b, c)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_2 = b \\ \lambda_1 + \lambda_3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - b \\ \lambda_2 = b \\ \lambda_3 = c - a + b \end{cases}$$

S : On va vérifier que ça convient bien.

$$(a - b)(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + (c - a + b)(0, 0, 1) = (a - b + b, a - b + c - a + b) = (a, b, c)$$

La famille est libre et génératrice de \mathbb{R}^3 donc c'est une base de \mathbb{R}^3 .

Les coordonnées de $\vec{x} = (a, b, c)$ dans cette base sont $(a - b, b, c - a + b)$.

4 Autres exemples de sous-espaces vectoriels.

Exemple 52. Les ensembles suivants ont la propriété de stabilité par combinaisons linéaires.

1. \mathbb{C} est un espace vectoriel.
L'addition et la multiplication externe sont celles définies dans le chapitre "Complexes".
2. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K} est un espace vectoriel.
L'addition et la multiplication externe sont celles définies dans le chapitre "Matrices".
L'élément neutre est la matrice nulle.
3. L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur I à valeurs dans \mathbb{R} est un espace vectoriel.
L'élément neutre est la fonction constante égale à 0.
4. L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans \mathbb{R} est un espace vectoriel.
5. $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} est un espace vectoriel.

Exemple 53. On peut montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

1. $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } M \text{ soit diagonale}\}$.
 - La matrice nulle est diagonale donc $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in F$.
 - Soit $(D_1, D_2) \in F^2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \cdot a_n + \lambda_2 \cdot b_n \end{pmatrix}$$

La matrice $\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ est encore diagonale donc $\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 \in F$.

Donc, l'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. $F = \{y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tel que } ay'' + by' + cy = 0\}$.
 - La fonction identiquement nulle est solution de cette EDL donc $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in F$.
 - Soit $(y_1, y_2) \in F^2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'' + b(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + c(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= \lambda_1 \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0 \text{ car } y_1 \in F} + \lambda_2 \underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{=0 \text{ car } y_2 \in F} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'EDL donc $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in F$.

Donc, l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. $F = \mathbb{K}_n[\mathbf{X}]$. On va montrer que c'est un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$.
 - Le polynôme nul est de degré $-\infty$ donc $0_{\mathbb{R}[\mathbf{X}]} \in \mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$.
 - Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[\mathbf{X}]^2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\deg(\lambda_1 P + \lambda_2 Q) \leq \max(\deg(\lambda_1 P), \deg(\lambda_2 Q)) \leq n$$

Donc, $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \in \mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$.

Donc, $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$ est un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

4. $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}$. On va montrer que c'est un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - La suite constante égale à 0 vérifie la relation donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$.
 - Soit $(u, v) \in F^2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, (\lambda_1 u + \lambda_2 v)_{n+2} &= \lambda_1 u_{n+2} + \lambda_2 v_{n+2} \\ &= \lambda_1 (2u_{n+1} + 3u_n) + \lambda_2 (2v_{n+1} + 3v_n) \\ &= 2(\lambda_1 u_{n+1} + \lambda_2 v_{n+1}) + 3(\lambda_1 u_n + \lambda_2 v_n) \\ &= 2(\lambda_1 u + \lambda_2 v)_{n+1} + 3(\lambda_1 u + \lambda_2 v)_n \end{aligned}$$

Donc, $\lambda_1 u + \lambda_2 v \in F$.

Donc, F est un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.