Exercice 1 Parmi les espaces suivants, lesquels sont des sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$?

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x + y = 0\}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x + y = 1\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $2x + y - z = 0\}$
4. $F = \{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\}$
5. $F = \{(x, y, y - x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
6. $F = \{(x, y, 3), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

Correction Pour montrer qu'un ensemble est un sous−espace vectoriel, on peut l'écrire comme un ensemble de combinaisons linéaires ou utiliser la définition.

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\quad x + y = 0\} = \{(x, -x),\ x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1))$
   donc c'est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. $(1, 0) \in F$, $(0, 1) \in F$ et pourtant $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F$ donc F n'est pas un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3. On vérifie les deux points de la définition d'un sous-espace vectoriel.
   - $\overrightarrow{0_3} = (0, 0, 0)$.
     $2.0 + 0 - 0 = 0$ donc $\overrightarrow{0_3} \in F$.
   - Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
     $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$.
     Montrons que $\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$.
     $\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (\lambda.x + a, \lambda.y + b, \lambda.y + b)$.
     $2(\lambda.x + a) + (\lambda.y + b) - (\lambda.z + c) = \lambda(2x + y - z) + (a + b - c) = 0$. Donc, $\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$.

   On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. On va vérifier les deux points de la définition de sous−espaces vectoriels.
   (a) $\overrightarrow{0_2} = (0, 2.0)$ donc $\overrightarrow{0_2} \in F$.
   (b) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (x, 2x)$ et $v = (y, 2y)$.
   $\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \lambda(x, 2x) + \mu(y, 2y) = (\lambda.x + \mu.y, 2(\lambda.x + \mu.y))$. Donc, $\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$.

   Donc F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
5. On va vérifier les deux points de la définition d'un sous−espace vectoriel.
   (a) $\overrightarrow{0_3} = (0, 0, 0 - 0)$ donc $\overrightarrow{0_3} \in F$.
   (b) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $\exists (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, y_1 - x_1)$ et $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, y_2 - x_2)$.
   $\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \lambda(x_1, y_1, y_1 - x_1) + \mu(x_2, y_2, y_2 - x_2)$
   $= (\lambda.x_1 + \mu.x_2, \lambda.y_1 + \mu.y_2, (\lambda.y_1 + \mu.y_2) - (\lambda.x_1 + \mu.x_2))$.
   Donc, $\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$.

   Donc F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
6. $(0, 0, 3) \in F$ et $(1, 1, 3) \in F$. Pourtant, $(0, 0, 3) + (1, 1, 3) = (1, 1, 6) \notin F$. Donc F n'est pas un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

1. Ecrivez les ensembles suivants comme des sous−espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs à déterminer. (on parlera de famille génératrice)
   (a) Dans $E = \mathbb{R}^3$: $H = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
   (b) Dans $E = \mathbb{R}^n$: $G = \{(a, \ldots, a) \in \mathbb{R}^n\ ,\ a \in \mathbb{R}\}$
   (c) Dans $E = \mathbb{R}^3$: $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x + y - z = 0\}$
2. Déterminer $H \cap R$. Est-ce un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Correction

1. (a) $H = \{a(1, 1, 1) + b(-1, 1, -3), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, 1 - 3))$.

(b) G =Vect$((1,1,\dots,1,1))$

(c) $R = \{(x,y,x+y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ =Vect$((1,0,1),(0,1,1))$.

2. • Soit $\overrightarrow{v}\in H\cap R$.
Comme $\overrightarrow{v}\in H$, il existe donc $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tel que $\overrightarrow{v}=(a-b,a+b,a-3b)$.
Comme $\overrightarrow{v}\in R$, $a-b+a+b-a+3b=0$ i.e. $a+3b=0$. D'où $v=(-4b,-2b,-6b)$.
Donc $\overrightarrow{v}\in$Vect$((2,1,3))$.
Donc $H\cap R\subset$ Vect$((2,1,3))$.

   • En prenant $a=\dfrac{3}{2}$ et $b=-\dfrac{1}{2}$, on remarque que $(2,1,3)\in H$.
De plus, $2+1-3=0$ donc $(2,1,3)\in R$.
Donc Vect$((2,1,3))\subset H\cap R$.

   D'où $H\cap R=$ Vect$((2,1,3))$.
   C'est donc un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On peut aussi l'affirmer en disant que $H\cap R$ est l'intersection de deux sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 Soit $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&2z&=&0\\ 2x&-&y&+&3z&=&0\end{array}\right.\right\}$.
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction On commence par résoudre le système.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&2z&=&0\\ 2x&-&y&+&3z&=&0\end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&2z&=&0\\ &-&3y&-&z&=&0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&-6y&=&0\\ &&&&z&=&-3y\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x&=&5y\\ z&=&-3y\end{array}\right.$$

Donc, $G=\{(5y,y,-3y),\ y\in\mathbb{R}\}$ =Vect$((5,1,-3))$. G est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^4$, on note $\overrightarrow{e_1}=(1,-1,1,2)$ et $\overrightarrow{e_2}=(-1,2,3,1)$

1. Déterminer Vect$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
2. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Soit $\overrightarrow{u}=(-2,x,y,3)$.
A quelle condition sur (x,y) est-ce que $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}$ et de $\overrightarrow{e_2}$?

Correction

1.
$$\begin{aligned}\text{Vect}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) &= \left\{\lambda_1(1,-1,1,2)+\lambda_2(-1,2,3,1),(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.\\ &= \left\{(\lambda_1-\lambda_2,-\lambda_1+2\lambda_2,\lambda_1+3\lambda_2,2\lambda_1+\lambda_2),(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \in F &\iff \exists\,(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} -2 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ x = -\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ y = \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 3 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \\
&\iff \exists\,(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} -2 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ 3 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ x = -\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ y = \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases} \\
&\iff \exists\,(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{1}{3} = \lambda_1 \\ \frac{7}{3} = \lambda_2 \\ x = -\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ y = \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases} \\
&\iff \exists\,(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{1}{3} = \lambda_1 \\ \frac{7}{3} = \lambda_2 \\ x = 4 \\ y = \frac{22}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, $\overrightarrow{u} \in F \Leftrightarrow x = 4$ et $y\dfrac{22}{3}$.

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\overrightarrow{e_1} = (1,-1,-2)$, $\overrightarrow{e_2} = (-1,2,3)$, $\overrightarrow{e_3} = (3,-4,-7)$ et $\overrightarrow{e_4} = (-2,3,5)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{e_3} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ et $\overrightarrow{e_4} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})$.
3. En déduire que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})$.

Correction

1. $\overrightarrow{e_3} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ donc $\overrightarrow{e_3} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
   $\overrightarrow{e_4} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ donc $\overrightarrow{e_4} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
2. $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donc il est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs inclus dans cet ensemble.
   Donc, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})$.
3. On va montrer l'inclusion inverse.
   $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}$ donc $\overrightarrow{e_1} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})$.
   $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}$ donc $\overrightarrow{e_2} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})$.
   Par stabilité par combinaison linéaire, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}) \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
   Par double inclusion, on obtient l'égalité.

Exercice 6 Reprendre les quatre ensembles de l'exercice 2 et en donner une base.

Correction

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Comparer (en terme d'inclusion) les ensembles suivants : $\mathrm{Vect}((\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, $\mathrm{Vect}((\overrightarrow{u})$ et $\mathrm{Vect}((\overrightarrow{u},\lambda.\overrightarrow{u})$.

Correction

- $\mathrm{Vect}(u) = \{\lambda_1.u,\ \lambda_1 \in \mathbb{R}\} = \{\lambda_1.u + 0.v,\ \lambda_1 \in \mathbb{R}\} \subset \{\lambda_1.u + \lambda_2.v,\ (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$
  donc $\mathrm{Vect}(u) \subset \mathrm{Vect}(u,v)$.

- $\text{Vect}(u, \lambda.u) = \{\lambda_1.u + \lambda_2(\lambda.u),\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda_1 + \lambda.\lambda_2)u,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} = \{\lambda_1.u,\ \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$
Donc, $\text{Vect}(u, \lambda.u) = \text{Vect}(u)$

Exercice 8 Les familles suivantes sont-elles des familles libres de $\mathbb{R}^3$?

1. $\vec{e_1} = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (1, 2, 2)$.
2. $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (1, 1, 0)$ et $\vec{e_3} = (1, 1, 1)$.
3. $\vec{e_1} = (1, -1, 1)$, $\vec{e_2} = (2, -1, 3)$ et $\vec{e_3} = (-1, 1, -1)$.
4. $\vec{e_1} = (1, 2, 1)$, $\vec{e_2} = (2, 1, -1)$ et $\vec{e_3} = (1, -1, -2)$.

Correction

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$.
$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,1,2) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
La famille (e_1, e_2) est libre.
2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$.
$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
La famille (e_1, e_2, e_3) est libre.
3. $e_1 = e_3$ donc la famille est liée. Elle n'est pas libre.
4. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$.
$$\begin{aligned} \lambda_1(1,2,1) &+ \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(1,-1,-2) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
Le système a une infinité de solution donc la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre, elle est liée.
On a, par exemple, $e_1 - e_2 + e_3 = 0$.

Exercice 9 Soit $k \in \mathbb{R}$. Soient $\vec{e_1} = (1, k, 2)$, $\vec{e_2} = (-1, 8, k)$ et $\vec{e_3} = (1, 2, 1)$.
Déterminez les valeurs de k pour lesquelles la famille est libre.

Correction Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ k\lambda_1 + 8\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + k\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - kL_1; L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ (8+k)\lambda_2 + (2-k)\lambda_3 = 0(k+2)\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ (8+k)\lambda_2 + (2-k)\lambda_3 = 0 \\ (k+2)\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
Si $k \neq -8$,
$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ (8+k)\lambda_2 + (2-k)\lambda_3 = 0 \\ (k+2)\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow (k+8)L_3 - (k+2)L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ (8+k)\lambda_2 + (2-k)\lambda_3 = 0 \\ (-12 - k + k^2)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Si $k \neq 4,\ k \neq -3$,

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ (8+k)\lambda_2 + (2-k)\lambda_3 = 0 \\ (-12-k+k^2)\lambda_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ (8+k)\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$$

Donc, si $k \neq -8,\ k \neq 4,\ k \neq -3$, la famille est libre.
Si $k = 4$,

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 12\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = -4\lambda_2 \\ \lambda_3 = 6\lambda_2 \end{array}\right.$$

Donc, $(-4, 1, 6)$ est solution du système. La famille n'est pas libre si $k = 4$.
Si $k = -3$,

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 3\lambda_2 \\ \lambda_3 = -\lambda_2 \end{array}\right.$$

Donc, $(3, 1, -1)$ est solution du système. La famille n'est pas libre si $k = -3$.
Si $k = -8$,

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ (8+k)\lambda_2 + (2-k)\lambda_3 = 0 \\ (k+2)\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 10\lambda_3 = 0 \\ -6\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}\right.$$

Donc, la famille est libre si $k = -8$.

Exercice 10 Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de $\mathbb{R}^3$?

1. $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$
2. $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 2)$.
3. $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (1, 1, 1)$.
4. $\overrightarrow{e_1} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{e_3} = (1, 1, 0)$.

Correction

1. $\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \{(x, y, 0)\ ,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Donc, $(0, 0, 1) \notin \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.
   Ce n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. $\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)) = \{(x, y, 2z)\ ,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x, y, \tilde{z})\ ,\ (x, y, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^3$.
   C'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3. On va écrire les vecteurs de la base canonique comme combinaison linéaire des trois vecteurs proposés.
   $(1, 0, 0) = e_1$, $(0, 1, 0) = e_2 - e_1$ et $(0, 0, 1) = e_3 - e_2$.
   Donc, $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.
   Or, $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \subset \mathbb{R}^3$ donc, $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$.
4. On va raisonner par analyse et synthèse. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   A : Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 + \lambda_3 \\ y = \lambda_1 + \lambda_3 \\ z = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{z - x + y}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{x - y + z}{2} \\ \lambda_3 = \dfrac{y - z + x}{2} \end{cases}$$

S : Posons $\lambda_1 = \dfrac{z - x + y}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{x - y + z}{2}$ et $\lambda_3 = \dfrac{y - z + x}{2}$.

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \dfrac{z - x + y}{2}(0, 1, 1) + \dfrac{x - y + z}{2}(1, 0, 1) + \dfrac{y - z + x}{2}(1, 1, 0)$

$= \left(0, \dfrac{z - x + y}{2}, \dfrac{z - x + y}{2}\right) + \left(\dfrac{x - y + z}{2}, 0, \dfrac{x - y + z}{2}\right) + \left(\dfrac{y - z + x}{2}, \dfrac{y - z + x}{2}, 0\right) = (x, y, z).$

Donc, la famille (e_1, e_2, e_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$. C'est même une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction

Exercice 11 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\overrightarrow{e_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0, 1, 1)$.

1. Rappeler la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} = (8, 4, 2)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Correction

1. Il s'agit de la famille $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.
2. On doit donc montrer qu'il s'agit d'une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$. On va commencer par génératrice en utilisant la méthode d'analyse et synthèse.
   (a) **Analyse** Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Supposons qu'il existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$.

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 \\ x_2 = a_1 + a_2 + a_3 \\ x_3 = a_1 + a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = x_1 - a_1 \\ a_1 = x_2 - (x_1 - a_1) - (x_3 - a_1) \\ a_3 = x_3 - a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = x_2 - x_3 \\ a_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ a_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

   Donc, s'il existe une décomposition dans la famille (e_1, e_2, e_3), elle est unique et donnée par le système précédent.

   (b) **Synthèse** Soit $x \in \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique sont (x_1, x_2, x_3).
   On a bien $x = (x_1 - x_2 + x_3)e_1 + (x_2 - x_3)e_2 + (x_2 - x_1)e_3$

   On a donc trouvé une écriture de $x \in \mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire de la famille (e_1, e_2, e_3). C'est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

   De plus, la décomposition est unique donc c'est également une famille libre.
   C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Par la question précédente, $(8, 4, 2) = 6e_1 + 2e_2 - 4e_3$.

Exercice 12

1. Montrer que la famille $(\overrightarrow{e_1} = (2, 1, 1), \overrightarrow{e_2} = (1, 4, 3), \overrightarrow{e_3} = (0, 1, 1), \overrightarrow{e_4} = (1, 2, 3))$ forme une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Est-elle libre ?
3. Proposer une base de $\mathbb{R}^3$ extraite de la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$.