

Chapitre 26 Sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Table des matières

1	Dimension finie.	2
1.1	Définition et premiers exemples	2
1.2	Recherche de la dimension.	2
1.3	Recherche de bases.	3
1.4	Application à l'égalité de sous-espaces vectoriels.	4
2	Familles de vecteurs en dimension connue.	4
2.1	Familles libres et génératrices d'un sous-espace vectoriel.	4
2.2	Rang d'une famille de vecteurs.	5
2.3	Lien avec le rang d'une matrice.	6

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Par exemple, \mathbb{R}^n , \mathbb{C} , $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Dimension finie.

1.1 Définition et premiers exemples

Définition 1.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est de dimension finie lorsque F possède une famille génératrice finie.

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p) \in F^p \text{ tel que } F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$$

Sinon, on dit que F est de dimension infinie.

Théorème 2.

1. \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 sont de dimension finie.
2. \mathbb{C} est de dimension finie.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est de dimension finie.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

Exemple 3. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 4. Soit $G = \mathbb{R}_3[\mathbf{X}]$. Montrer que G est de dimension finie.

Théorème 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$ est de dimension finie.
2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ est de dimension infinie.

1.2 Recherche de la dimension.

Théorème 6.

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie.

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille génératrice de F , c'est-à-dire $F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$.

Si $\vec{e}_p \in \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{p-1})$ alors $F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{p-1})$.

Remarque 7. Deux familles génératrices peuvent ne pas avoir le même nombre de vecteurs.

Théorème 8.

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1})$ une famille de vecteurs de F .

Si la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est libre et si $\vec{e}_{p+1} \notin \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ alors la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{p+1})$ est aussi une famille libre.

Remarque 9. Deux familles libres peuvent ne pas avoir le même nombre de vecteurs.

Théorème 10.

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie.
Toutes les bases de F ont le même cardinal, c'est-à-dire le même nombre de vecteurs.

Définition 11.

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie.
On appelle dimension de F le cardinal commun à toutes les bases de F . On note cet entier $\dim(F)$.

Théorème 12.

1. $\dim(\mathbb{R}) = 1$.
2. $\dim(\mathbb{C}) = 2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.

Convention. Lorsque $F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, on pose $\dim(F) = 0$.
Lorsque F est de dimension infinie, on pose $\dim(F) = +\infty$.

Remarque 13. Il faut donc trouver des bases de sous-espaces vectoriels.

Exemple 14. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + z = 0\}$. Montrer que F est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exemple 15. Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 1), (-1, 0, 1, 1))$.
Montrer que F est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exemple 16. On travaille dans $E = \mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$ et on pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[\mathbf{X}] / P(0) = 0\}$.

1. Rappeler pourquoi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$.
2. Déterminer sa dimension.

1.3 Recherche de bases.

Théorème 17 (Théorème de la base extraite).

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
De toute famille génératrice de F on peut extraire une base de F .

Théorème 18 (Théorème de la base incomplète).

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie.
Toute famille libre de vecteurs de F peut être complétée pour obtenir une base de F .

Exemple 19. Soit $(\vec{u}_1 = (3, 2, -4, -1), \vec{u}_2 = (2, 1, -2, -1))$ des vecteurs de \mathbb{R}^4 .
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + y + z + t = 0\}$.

1. Montrer que \vec{u}_1 et \vec{u}_2 appartiennent à F .
2. Cette famille est-elle libre ?
3. Complétez la pour obtenir une base de F .

Remarque 20. Ce théorème est utile dans les démonstrations théoriques sur la dimension.

Théorème 21.

On suppose E de dimension finie (comme \mathbb{R}^n par exemple).
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
Alors, $\dim(F) \leq n$.

1.4 Application à l'égalité de sous-espaces vectoriels.

Théorème 22.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , de dimension finie.
Si $F \subset G$ et si $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

Remarque 23. Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux, il y a donc deux méthodes.

- Montrer que $F \subset G$ et $G \subset F$
- Montrer que $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$.

Exemple 24. Soient $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ et $G = \text{Vect}((1, 2, 1), (1, 0, -1))$. Montrer que $F = G$.

Définition 25.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension finie.

1. On dit que F est une droite vectorielle lorsque $\dim(F)=1$
2. On dit que F est un plan vectoriel lorsque $\dim(F)=2$

2 Familles de vecteurs en dimension connue.

2.1 Familles libres et génératrices d'un sous-espace vectoriel.

Théorème 26.

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie p .

1. Toutes les familles libres ont au plus p vecteurs.
2. Les familles de cardinal supérieur ou égal à $p + 1$ sont des familles liées.
3. (Les bases de F ont exactement p vecteurs.)
4. Les familles génératrices de F ont au moins p vecteurs.
5. Les familles dont le cardinal est strictement inférieur à p ne sont pas des familles génératrices de F .

Remarque 27. $\text{card}(\text{ famille libre}) \leq \text{card}(\text{base}) \leq \text{card}(\text{famille génératrice})$.

Exemple 28. La famille $\mathcal{F} = ((1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1))$ est-elle une famille génératrice de \mathbb{R}^4 ?

Exemple 29. La famille $\mathcal{F} = ((1, 4, 0), (-\sqrt{5}, 1, 1), (0, -2, 1), (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}))$ est-elle une famille libre de vecteurs de \mathbb{R}^3 ?

Théorème 30.

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie p .

1. Une famille libre ayant exactement p vecteurs est une base de E .
2. Une famille génératrice de E ayant exactement p vecteurs est une base de E .

Exemple 31. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 2, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Exemple 32. Dans \mathbb{R}^2 , montrer que deux vecteurs orthogonaux non nuls forment une base de \mathbb{R}^2 .

Exemple 33. Dans \mathbb{R}^3 , montrer que trois vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux forment une famille libre de \mathbb{R}^3 .

2.2 Rang d'une famille de vecteurs.

Définition 34.

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie.

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$ une famille de vecteurs de F .

On appelle rang de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$ la dimension de $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$ et on note

$$rg(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q) = \dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)).$$

Remarque 35. Pour déterminer le rang de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$, on doit déterminer une base de $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$.

Exemple 36. Déterminer le rang des familles suivantes.

1. $((1, 0), (0, 1))$
2. $((1, 0, -1), (2, 1, 0), (1, 1, 1))$
3. $(1, \mathbf{X}, 3\mathbf{X} + 5)$.

Exemple 37. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de E .

- $rg(\vec{u}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0}_E \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0}_E \end{cases}$
- $rg(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} 2 & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont linéairement indépendants} \\ 1 & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont linéairement dépendants et non tous les deux nuls} \\ 0 & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont tous les deux nuls} \end{cases}$

Théorème 38.

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$ une famille de vecteurs de E .

La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$ est libre si, et seulement si, le rang de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$ est égal à q .

2.3 Lien avec le rang d'une matrice.

Définition 39.

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie p .

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de F .

Soit $\vec{x} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot \vec{e}_k$ un vecteur de F .

On appelle matrice de \vec{x} dans la base \mathcal{B} la matrice colonne contenant les coordonnées de \vec{x} dans la base \mathcal{B} .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Définition 40.

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie p .

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de F .

Soient $\vec{x}_1 = \sum_{k=1}^p \lambda_{k,1} \cdot \vec{e}_k, \dots, \vec{x}_q = \sum_{k=1}^p \lambda_{k,q} \cdot \vec{e}_k$ des vecteurs de F .

On appelle matrice de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_q)$ dans la base \mathcal{B} la matrice suivante

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_q) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1q} \\ \lambda_{21} & \dots & \dots & \lambda_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \dots & \lambda_{pq} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$$

Exemple 41. Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^4 . Soient $\vec{u} = (1, 2, 0, -2)$, $\vec{v} = (1, 6, 1, -3)$, $\vec{w} = (-4, 0, 0, 1)$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exemple 42. Ecrire la matrice de la famille $(3\mathbf{X} + 5, \mathbf{X} - 2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[\mathbf{X}]$.

Exemple 43. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension finie. Soit \mathcal{B} une base de F . Écrire $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$.

Théorème 44.

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$ une famille de vecteurs de F .

Le rang de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$ est égal au rang de la matrice de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$ dans une base quelconque de E .

Exemple 45. On se place dans \mathbb{R}^4 et on pose

$$\vec{u}_1 = (1, 2, 1, 0), \vec{u}_2 = (-1, 1, 1, 0), \vec{u}_3 = (1, 5, 3, 0)$$

1. Sans aucun calcul, justifier que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ n'est pas génératrice de \mathbb{R}^4 .
2. Calculer le rang de cette famille.
3. On note $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Déterminer une base de F , on la note \mathcal{B} .
4. Compléter cette base \mathcal{B} en une base de \mathbb{R}^4 .