Exercice 1 Répondez par Vrai ou faux aux questions suivantes.

	Vrai	Faux
Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ est de dimension inférieure ou égale à 4.		
Toute famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.		
Toute famille contenant une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.		
Toute famille contenant une famille libre est encore une famille libre.		
Si $F \subset G$ alors $\dim(F) \leq \dim(G)$.		
Si $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.		
Si une famille contient 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ alors elle est libre.		

Exercice 2 Pour chacun des ensembles F proposés, déterminer une base et la dimension.

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } 2y + z - t = 0\}$
2. $F = \{(x + y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = 2y = 3z\}$
4. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[\mathbf{X}] \text{ tel que } P(1) = 0\}$
5. $F = \text{Vect}((\mathbf{X} - 1)^2, \mathbf{X}^2, (\mathbf{X} + 1)^2)$.

Exercice 3 Soient F et G les deux ensembles suivants

$$\begin{aligned} F &= \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + y + t = 0 \text{ et } 2x + y + z = 0\Big\} \\ G &= \text{Vect}((-2, 1, 3, 1), (0, 1, -1, -1)) \end{aligned}$$

1. Montrer que F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.
2. Montrer que $G \subset F$.
3. Montrer que $G = F$.

Exercice 4 Déterminer le rang des familles suivantes.

1. $\overrightarrow{e_1} = (1, 1, 0, 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1, -1, 1, 0)$, $\overrightarrow{e_3} = (2, 0, 1, 1)$, $\overrightarrow{e_4} = (0, -2, 1, -1)$
2. $\overrightarrow{e_1} = (-1, 2, 2)$, $\overrightarrow{e_2} = (4, -2, -1)$, $\overrightarrow{e_3} = (3, -1, 1)$, $\overrightarrow{e_4} = (-7, 3, 0)$
3. $\overrightarrow{e_1} = \mathbf{X} - 1$, $\overrightarrow{e_2} = 2\mathbf{X}$, $\overrightarrow{e_3} = \mathbf{X}^2 - 3\mathbf{X}$ et $\overrightarrow{e_4} = 3\mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 - 2$

<u>Exercice 5</u> On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{v} = (3, 2, 1)$.

1. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Complétez là en une base de $\mathbb{R}^3$. On notera cette base $\mathcal{B}$.
3. Soit $\overrightarrow{w} = (1, 4, 7)$ et soit $\overrightarrow{n} = (-1, 6, 9)$.
   Déterminer la matrice de la famille $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{n})$ dans la base $\mathcal{B}$.

<u>Exercice 6</u> Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 3. Soit $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ une base de F.

1. La famille $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est-elle une famille libre ?
2. La famille $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est-elle une base de F ?
3. Si oui, déterminez la matrice de la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ dans la base $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

<u>Exercice 7</u> On considère l'ensemble $E = \Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0\Big\}$.

1. Montrer que E est un sous−espace vectoriel de dimension finie.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.