

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions devront être soulignées ou encadrées.

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 – Etude de familles de vecteurs.

On travaille dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 . On introduit les cinq vecteurs suivants :

$$\vec{a} = (1, -1, 1, 0), \quad \vec{b} = (-1, 2, -2, 1), \quad \vec{c} = (-2, 2, -3, 1), \quad \vec{d} = (1, 4, -2, 2), \quad \vec{e} = (8, 2, 5, 1).$$

1. La famille de vecteurs $(\vec{c}, \vec{d}, \vec{e})$ est-elle libre?
Si ça n'est pas le cas, donner une relation entre ses vecteurs.
2. Montrer que la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ est une base de \mathbb{R}^4 .
3. On introduit l'ensemble

$$G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \begin{cases} x - z - t = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases} \right\}$$

- (a) Justifier que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 dont on donnera une famille génératrice.
- (b) Donner une base de G .
- (c) Le vecteur \vec{c} appartient-il à G ?
Si oui, écrire une combinaison linéaire des vecteurs la base trouvée ci-dessus égale au vecteur c .
4. On pose $F = \text{Vect}(\vec{c}, \vec{d})$. Soit $\vec{v} = (x, y, z, t)$ un vecteur quelconque de \mathbb{R}^4 .
À quelle(s) condition(s) sur les coordonnées x, y, z, t le vecteur \vec{v} appartient-il à F ?

Exercice 2 - Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

On pose

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x + 3y + z + 2t = 0 \end{cases} \right\} \text{ et } G = \text{vect}((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)).$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 dont on déterminera une base. On note \mathcal{B} cette base.
2. Déterminer une base de G . On note \mathcal{C} cette base.
3. On pose $\mathcal{D} = (\mathcal{B}, \mathcal{C})$ la concaténation des deux bases. Montrer que \mathcal{D} est une base de \mathbb{R}^4 .
4. Dans cette question, on se propose de montrer que tout vecteur de \mathbb{R}^4 s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .
Soit \vec{w} un vecteur de \mathbb{R}^4 fixé, quelconque.
 - (a) **Existence** : Montrer qu'il existe $(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$ tels que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ (On pourra utiliser la question 3).
 - (b) **Unicité** :
 - i. Montrer que $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$.
 - ii. On suppose qu'il existe $(\vec{u}_1, \vec{v}_1) \in F \times G$ et $(\vec{u}_2, \vec{v}_2) \in F \times G$ tels que $\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$. Montrer que $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in F \cap G$. Qu'en déduit-on sur \vec{u}_1 et \vec{u}_2 ?
 - iii. Conclure.

Exercice 3 - Commutants de matrices.

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

et les ensembles \mathcal{F} et \mathcal{G} définis par

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } AM = MA\} \text{ et } \mathcal{G} = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } CN = NC\}.$$

1. Montrer - sans utiliser l'expression de A - que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On admet le résultat pour \mathcal{G} .
2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
3. (a) Déterminer $P^{-1}AP$. On doit trouver une matrice de l'énoncé. En déduire une autre expression de A.
(b) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a l'équivalence $M \in \mathcal{F} \iff P^{-1}MP \in \mathcal{G}$
(c) On note $D = I_3 + C^2$ où I_3 est la matrice identité de taille 3.
Déterminer les matrices C^2 et D.
(d) Montrer que \mathcal{G} est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (D, C, C^2) . Déterminer sa dimension.
4. (a) Montrer que le produit de deux matrices de \mathcal{G} est dans \mathcal{G} .
(b) Soient N et N' deux éléments quelconques de \mathcal{G} . Déterminer les coordonnées de NN' dans la base (D, C, C^2) en fonction de celles de N et celles de N'.