

## Exercice 1.

1. Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels.

$$\begin{aligned} \alpha c + \beta d + \gamma e = 0_{\mathbb{R}^4} &\iff \alpha(-2, 2, -3, 1) + \beta(1, 4, -2, 2) + \gamma(8, 2, 5, 1) = (0, 0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} -2\alpha + \beta + 8\gamma = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ -3\alpha - 2\beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le système est de rang 2; il admet donc une infinité de solutions (paramétrées par un paramètre), par exemple (en choisissant  $\gamma$  comme paramètre, puis en posant  $\gamma = 1$ ) :  $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, -2, 1) (\neq (0, 0, 0))$  est solution. On obtient la relation :  $3c - 2d + e = 0_{\mathbb{R}^4}$ .

La famille est donc liée.

2. • Les vecteurs  $a, b, c, d$  appartiennent à  $\mathbb{R}^4$  donc  $\text{vect}(a, b, c, d) \subset \mathbb{R}^4$ .

• Montrons que  $\mathbb{R}^4 \subset \text{vect}(a, b, c, d)$ .

Soit  $u = (x, y, z, t)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^4$  fixé quelconque. On cherche  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$  tels que  $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = u$ .

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = u \iff \begin{cases} \alpha - \beta - 2\gamma + \delta = x \\ -\alpha + 2\beta - 2\gamma + 4\delta = y \\ \alpha - \beta - 3\gamma - 2\delta = z \\ \beta + \gamma + 2\delta = t. \end{cases}$$

∴ on échelonne le système

$$\iff \begin{cases} \alpha - \beta - 2\gamma + \delta = x \\ \beta + 5\delta = x + y \\ \gamma + 2\delta = y + z \\ -5\delta = -x - 2y - z + t. \end{cases}$$

On remarque que le système est de Cramer. Donc il existe une (unique) solution. Donc il existe  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  appartenant à  $\mathbb{R}$  tels que  $u = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$ . cela signifie que  $u \in \text{vect}(a, b, c, d)$ . Ainsi,  $\mathbb{R}^4 \subset \text{vect}(a, b, c, d)$ .

On déduit des deux points précédents que  $\mathbb{R}^4 = \text{vect}(a, b, c, d)$ . Donc la famille  $(a, b, c, d)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^4$ .

De plus, cette famille est libre.

On peut donc conclure que la famille  $(a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

3. (a) L'ensemble  $G$  est l'ensemble des solutions du système  $\begin{cases} x - z - t = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases}$  (celui qui définit  $G$ ). On résout ce système (qui est déjà sous forme échelonnée). Pour cela, on a besoin de

deux paramètres :

$$G = \{(z + t, 2t, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On modifie l'écriture de l'ensemble  $G$  :

$$\begin{aligned} G &= \{(z + t, 2t, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(z, 0, z, 0) + (t, 2t, 0, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{z(1, 0, 1, 0) + t(1, 2, 0, 1), (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1)). \end{aligned}$$

Cette nouvelle écriture nous permet d'affirmer facilement que

$G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  et que  $((1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1))$  est génératrice de  $G$ .

- (b) Les deux vecteurs de la famille exhibée ci-dessus ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre. Donc, la famille  $((1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1))$  est une base de  $G$ .
- (c) Les coordonnées du vecteur  $\vec{c}$  vérifient les deux conditions d'appartenance de  $G$  donc  $\vec{c} \in G$ .

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\vec{c} = \lambda(1, 0, 1, 0) + \mu(1, 2, 0, 1)$ . Donc,

$$\begin{cases} -2 = \lambda + \mu \\ 2 = 2\mu \\ -3 = \lambda \\ 1 = \mu \end{cases}$$

Donc,  $\mu = 1$  et  $\lambda = -3$ . On peut donc écrire  $\vec{c} = -3(1, 0, 1, 0) + (1, 2, 0, 1)$ .

4.

$$\vec{v} \in F \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \vec{v} = \lambda \vec{c} + \mu \vec{d}$$

$$\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} -2\lambda + \mu = x \\ 2\lambda + 4\mu = y \\ -3\lambda - 2\mu = z \\ \lambda + 2\mu = t. \end{cases}$$

$\iff$  le système précédent possède au moins une solution.

On résout donc ce système d'inconnues  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} -2\lambda + \mu = x \\ 2\lambda + 4\mu = y \\ -3\lambda - 2\mu = z \\ \lambda + 2\mu = t \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + 2\mu = t \\ 4\mu = z + 3t \\ 0 = y - 2t \\ 0 = 4x - 5z - 7t. \end{cases}$$

Le système admet une solution si, et seulement si, les conditions de compatibilité du système sont vérifiées.

Ainsi,  $\vec{v}$  appartient à  $F$  si, et seulement si,  $y - 2t = 0$  et  $4x - 5z - 7t = 0$ .

## Exercice 2

1. Posons ( $S$ ) le système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x + 3y + z + 2t = 0 \end{cases}$$

( $F$  est donc l'ensemble des solutions du système ( $S$ )).

En résolvant ( $S$ ) par la méthode du pivot de Gauss, on obtient l'ensemble des solutions de ( $S$ ) qui est :

$$\{(-2z - t, z, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\},$$

qui s'écrit aussi  $\text{vect}((-2, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ . D'où  $F = \text{vect}((-2, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ .

Donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

La famille  $((-2, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$  est une famille génératrice de  $F$ . De plus, elle est composée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. Ainsi,

$\mathcal{B} = ((-2, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$  est une base de  $F$ .

2. Par définition, la famille  $((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0))$  est une famille génératrice de  $G$ . Elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. Donc

$\mathcal{C} = ((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0))$  est une base de  $G$ .

3. On a  $\mathcal{D} = (\vec{u}_1 = (-2, 1, 1, 0), \vec{u}_2 = (-1, 0, 0, 1), \vec{u}_3 = (1, 1, 1, 1), \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0))$ . Montrons que  $\mathcal{D}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ . Soient  $\vec{u} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ .

Analyse. Supposons qu'il existe  $(x, y, z, t)$  quatre réels tels que  $\vec{u} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 + t\vec{u}_4$ .

$$\text{Alors } \begin{cases} -2x - y + z + t = a \\ x + z = b \\ x + z + t = c \\ y + z = d \end{cases} \quad \text{Donc, } \begin{cases} x + z = b \\ y + z = d \\ -2x - y + z + t = a \\ x + z + t = c \end{cases}$$

$$\text{Donc, } \begin{cases} x + z = b \\ y + z = d \\ -y + 3z + t = a + 2b \\ t = c - b \end{cases} \quad \text{Donc, } \begin{cases} x + z = b \\ y + z = d \\ 4z + t = a + 2b + d \\ t = c - b \end{cases}$$

$$\text{Donc, } \begin{cases} x = \frac{-a + b - d + c}{4} \\ y = \frac{-a - 3b + 3d + c}{4} \\ z = \frac{a + 3b + d - c}{4} \\ t = c - b \end{cases}$$

Synthèse.

$$\frac{-a + b - d + c}{4}\vec{u}_1 + \frac{-a - 3b + 3d + c}{4}\vec{u}_2 + \frac{a + 3b + d - c}{4}\vec{u}_3 + (c - b)\vec{u}_4 = (a, b, c, d)$$

Donc  $\mathcal{D}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^4$ .

De plus, la décomposition obtenue est unique donc on en déduit que  $\mathcal{D}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

4. Soit  $\vec{w}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^4$  fixé, quelconque.

- (a) **Existence :** Puisque  $\mathcal{D}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ , il existe  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  tels que  $\vec{w} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 + t\vec{u}_4$ . Posons  $\vec{u} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$  et  $\vec{v} = z\vec{u}_3 + t\vec{u}_4$ .

On a bien  $\vec{u} \in F$  et  $\vec{v} \in G$ , et  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ .

- (b) **Unicité :**

i. Montrons les deux inclusions :

- $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  (cours) donc  $0_{\mathbb{R}^4} \in F \cap G$ .  
Donc  $\{0_{\mathbb{R}^4}\} \subset F \cap G$ .

- Réciproquement, soit  $\vec{u} \in F \cap G$  fixé quelconque.  
Puisque  $\mathcal{D}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ , il existe  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  tels que  $\vec{u} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 + t\vec{u}_4$ .  
De plus,  $\vec{u} \in F$  donc il existe  $(x', y') \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\vec{u} = x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2$ . Donc  $\vec{u} = x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 + 0\vec{u}_4$ . De même,  $\vec{u} \in G$  donc il existe  $(z', t') \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\vec{u} = z'\vec{u}_3 + t'\vec{u}_4$ . Donc  $\vec{u} = x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 + 0\vec{u}_4$ . Par unicité des coordonnées dans une base, on en déduit que

$$\begin{cases} x = x' = 0 \\ y = y' = 0 \\ z = 0 = z' \\ t = 0 = t' \end{cases}$$

Donc  $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ . Donc  $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ .

Ainsi,  $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$ .

- ii. Puisque  $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$ , on en déduit  $\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ . Or
- $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  appartiennent à  $F$ , qui est stable par combinaisons linéaires (en tant que sev de  $\mathbb{R}^4$ ), donc  $\vec{u}_2 - \vec{u}_1 \in F$ .
  - De même,  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in G$ . D'après l'égalité précédente, cela veut dire que  $\vec{u}_2 - \vec{u}_1 \in G$ .  
Ainsi,  $\vec{u}_2 - \vec{u}_1 \in F \cap G$ . D'après la question précédente, on en déduit  $\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = 0_{\mathbb{R}^4}$ , d'où  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ . Puis,  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ .
- iii. Conclusion :  $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^4, \exists!(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G : \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ .

### Exercice 3.

1. •  $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ;
- la matrice nulle  $0$  appartient à  $\mathcal{F}$  car  $0A = A \times 0 = 0$  ;
  - $\forall M, N \in \mathcal{F}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad MA = AM$  et  $NA = AN$  donc  $(\lambda M + N)A = \lambda MA + NA = \lambda AM + AN = A(\lambda M + N)$  autrement dit  $\lambda M + N \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$  est donc un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{cases} y - z = a \\ x + z = b \\ -x - y - z = c \end{cases} \begin{matrix} \iff \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + z = b \\ y - z = a \\ -x - y - z = c \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \iff \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y = b \\ y - z = a \\ -y = b + c \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \iff \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + z = b \\ y - z = a \\ -z = a + b + c \end{cases}$$

Le système est de rang 3 donc  $P$  est inversible.

$$\begin{cases} x + z = b \\ y - z = a \\ -z = a + b + c \end{cases} \begin{matrix} \iff \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + z = b \\ y = -b - c \\ z = -a - b - c \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \iff \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} x = a + 2b + c \\ y = -b - c \\ z = -a - b - c \end{cases}$$

Donc 
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. (a)  $P^{-1}AP = C$  et  $A = PCP^{-1}$ .  
 (b) Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\iff AM = MA \\ &\iff PCP^{-1}M = MPCP^{-1} \\ &\iff CP^{-1}M = P^{-1}MPCP^{-1} \\ &\iff CP^{-1}MP = P^{-1}MPC \\ &\iff P^{-1}MP \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

(c)  $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $D = I_3 + C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(d) Soit  $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On a  $CN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{pmatrix}$  et  $NC = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 0 & f & -e \\ 0 & i & -h \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{G} &\iff CN = NC \\ &\iff \begin{cases} c = -b = -g = d = 0 \\ f = -h \\ e = i \end{cases} \\ &\iff N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix} \\ &\iff N = aD - fC - eC^2 \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{G} = \text{Vect}(D, C, C^2)$ .

Soit  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1.D + \lambda_2.C + \lambda_3.C^2 = 0$ .

Alors,  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & -\lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Donc,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 0$ .

Donc  $(D, C, C^2)$  est libre. C'est une base de  $\mathcal{G}$  et  $\boxed{\text{la dimension de } \mathcal{G} \text{ est } 3}$ .

4. (a) Soient  $N$  et  $N'$  deux éléments quelconques de  $\mathcal{G}$ .

$CNN' = NCN'$  car  $C$  et  $N$  commutent.

Donc,  $CNN' = NCN' = NN'C$  car  $C$  et  $N'$  commutent. Donc  $NN' \in \mathcal{G}$ .

- (b) Soient  $(x, y, z)$  les coordonnées de  $N$  dans la base  $(D, C, C^2)$ . Soit  $(x', y', z')$  les coordonnées de  $N'$  dans la base  $(D, C, C^2)$ .

$$(xD + yC + zC^2)(x'D + y'C + z'C^2) = xx'D^2 + xy'DC + xz'DC^2 + yx'CD + yy'C^2 + yz'C^3 + zx'C^2D + zy'C^3 + zz'C^4.$$

Or,  $D^2 = D$ ,  $DC = CD = 0$ ,  $DC^2 = C^2D = 0$ ,  $C^3 = -C$  et  $C^4 = -C^2$ .

Donc,  $\boxed{NN' = xx'D - (yz' + zy')C + (yy' - zz')C^2}$ .