<u>Exercice 1</u> Répondez par Vrai ou faux aux questions suivantes.

	Vrai	Faux
Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ est de dimension inférieure ou égale à 4.		
Toute famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.		
Toute famille contenant une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.		
Toute famille contenant une famille libre est encore une famille libre.		
Si $F \subset G$ alors $\dim(F) \leq \dim(G)$.		
Si $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.		
Si une famille contient 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ alors elle est libre.		

<u>Exercice 2</u> Pour chacun des ensembles F proposés, déterminer une base et la dimension.

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } 2y + z - t = 0\}$
2. $F = \{(x + y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = 2y = 3z\}$
4. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[\mathbf{X}] \text{ tel que } P(1) = 0\}$
5. $F = \text{Vect}((\mathbf{X} - 1)^2, \mathbf{X}^2, (\mathbf{X} + 1)^2)$.

<u>Correction</u>

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } 2y + z - t = 0\} = \{(x, y, z, 2y + z),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ donc $F = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 1))$.
   Cette famille est une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1, 0, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, 2) + \lambda_3(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$.
   Donc $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$
   Donc, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
   Cette famille est donc une base de F. Ainsi, $\dim(F) = 3$.
2. $F = \text{Vect}((6, 3, 2))$. Cette famille est constituée d'un seul vecteur non nul donc elle est libre. c'est une base de F. Ainsi, $\dim(F) = 1$.
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Soit $P = a\mathbf{X}^3 + b\mathbf{X}^2 + c\mathbf{X} + d$.

$$\begin{aligned} P \in F \Leftrightarrow a + b + c + d = 0 &\Leftrightarrow P = a\mathbf{X}^3 + b\mathbf{X}^2 + c\mathbf{X} - a - b - c \\ &\Leftrightarrow P = a(\mathbf{X}^3 - 1) + b(\mathbf{X}^2 - 1) + c(\mathbf{X} - 1) \end{aligned}$$

donc $F=$Vect$(\mathbf{X}-1, \mathbf{X}^2-1, \mathbf{X}^3-1)$.
On a déterminé une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(\mathbf{X}-1)+\lambda_2(\mathbf{X}^2-1)+\lambda_3(\mathbf{X}^3-1)=0$.
Par identification des coefficients, $\begin{cases} \lambda_3=0 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ -\lambda_3-\lambda_2=0-\lambda_1=0 \end{cases}$
Donc, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.
Cette famille est libre. C'est une base de F donc $\dim(E)=3$.

4. La famille $((\mathbf{X}-1)^2, \mathbf{X}^2, (\mathbf{X}+1)^2)$ est génératrice de F.
De plus, en précédent comme dans la question précédente, on montrer que cette famille est libre.
C'est une base de F. Ainsi, $\dim(F)=3$.

Exercice 3 Soient F et G les deux ensembles suivants

$$\begin{array}{rcl} F & = & \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ \text{ tel que } \ x+y+t=0 \text{ et } 2x+y+z=0\right\} \\ G & = & \text{Vect}((-2,1,3,1),(0,1,-1,-1)) \end{array}$$

1. Montrer que F est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.
2. Montrer que $G \subset F$.
3. Montrer que $G=F$.

Correction

1. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} x+y+t=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+t=0 \\ -y+z-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-t \\ z=y+2t \end{cases}$$

Donc, $F=\{y(-1,1,1,0)+t(-1,0,2,1),\ (y,t)\in\mathbb{R}^2\}=$Vect$((-1,1,1,0),(-1,0,2,1))$.
F est donc un sous–espace vectoriel de dimension finie et on en connait une famille génératrice.
Montrons qu'elle est libre.
Les deux vecteurs sont non nuls et non colinéaires donc ils forment une famille libre.
On a donc une base de F et $\dim(F)=2$.

2. On va montrer que les deux vecteurs qui engendrent G appartiennent à F.
   - $-2+1+1=0$ et $-4+1+3=0$ donc $(-2,1,3,1)\in F$.
   - $0+1-1=0$ et $0+1-1=0$ donc $(0,1,-1,-1)\in F$.

Or, F est stable par combinaison linéaire donc Vect$((-2,1,3,1),(0,1,-1,-1))\subset F$.
Donc, $\boxed{G\subset F}$.

3. Déterminons la dimension de G.
La famille génératrice de G est libre puisque les vecteurs sont non colinéaires. Donc, c'est une base de G et $\dim(G)=2$.
Ainsi, $G\subset F$ et $\dim(F)=$dim(G) donc $\boxed{F=G}$.

Exercice 4 Déterminer le rang des familles suivantes.

1. $\overrightarrow{e_1}=(1,1,0,1)$, $\overrightarrow{e_2}=(1,-1,1,0)$, $\overrightarrow{e_3}=(2,0,1,1)$, $\overrightarrow{e_4}=(0,-2,1,-1)$
2. $\overrightarrow{e_1}=(-1,2,2)$, $\overrightarrow{e_2}=(4,-2,-1)$, $\overrightarrow{e_3}=(3,-1,1)$, $\overrightarrow{e_4}=(-7,3,0)$
3. $\overrightarrow{e_1}=\mathbf{X}-1$, $\overrightarrow{e_2}=2\mathbf{X}$, $\overrightarrow{e_3}=\mathbf{X}^2-3\mathbf{X}$ et $\overrightarrow{e_4}=3\mathbf{X}^3+\mathbf{X}^2-2$

Correction On va écrire la matrice de la famille dans la base canonique, notée $\mathcal{B}_c$ de l'espace vectoriel adapté.

1. Soit $A_1 = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$. On a $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{rg}(A_1) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \text{ et } L_4 \leftarrow 2L_4 - L_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $\text{rg}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}) = 2$.

2. $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3 donc $\text{rg}(e_1, e_2, e_3, e_4) \leq 3$.
Soit $A_2 = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$. On a $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -7 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{rg}(A_2) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -7 \\ 0 & 6 & 5 & -17 \\ 0 & 7 & 7 & -14 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow 6L_3 - 7L_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -7 \\ 0 & 6 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 7 & 35 \end{pmatrix}$$

Donc, $\text{rg}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}) = 3$.

3. Soit $A_3 = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}, \overrightarrow{P_4})$. On a $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{rg}(A_3) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc, $\text{rg}(\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}, \overrightarrow{P_4}) = 4$.

Exercice 5 On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{v} = (3, 2, 1)$.

1. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Complétez là en une base de $\mathbb{R}^3$. On notera cette base $\mathcal{B}$.
3. Soit $\overrightarrow{w} = (1, 4, 7)$ et soit $\overrightarrow{n} = (-1, 6, 9)$.
Déterminer la matrice de la famille $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{n})$ dans la base $\mathcal{B}$.

Correction

1. $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3 donc les bases sont formées de 3 vecteurs. Donc, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On doit ajouter un vecteur pour former une base de $\mathbb{R}^3$. On va compléter avec des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$. Etudions la liberté de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_1})$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \overrightarrow{u} + \lambda_2 \overrightarrow{v} + \lambda_3 \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0_3}$.

Donc, $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$

Donc, $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -8\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$

Donc, $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

Donc, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.

Donc, la famille est libre. De plus, cette famille est constituée de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3. Donc, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $(1, 4, 7) = \lambda_1.\overrightarrow{u} + \lambda_2.\overrightarrow{v} + \lambda_3 \overrightarrow{e_1}$.

Donc, $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 7 \end{cases}$

Donc, $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ -4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 2 \\ -8\lambda_2 - 3\lambda_3 = 4 \end{cases}$

Donc, $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ -4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

Donc, $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{5}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-1}{2} \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

Donc, $\overrightarrow{u} = \frac{5}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{v} + 0\overrightarrow{e_1}$.

On fait de même pour $\overrightarrow{n}$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $(-1, 6, 9) = \lambda_1.\overrightarrow{u} + \lambda_2.\overrightarrow{v} + \lambda_3 \overrightarrow{e_1}$.

Donc, $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = -1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 6 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 9 \end{cases}$.

Donc, $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = -1 \\ -4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 8 \\ -8\lambda_2 - 3\lambda_3 = 12 \end{cases}$

Donc, $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = -1 \\ -4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 8 \\ \lambda_3 = -4 \end{cases}$

Donc, $\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -4 \end{cases}$

Donc, $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v} - 4\overrightarrow{e_1}$.

Finalement, $\mathrm{mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_1})}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{n}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

<u>**Exercice**</u> <u>6</u> Soit F un sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 3. Soit $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ une base de F.

1. La famille $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est-elle une famille libre ?

2. La famille $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est-elle une base de F ?
3. Si oui, déterminez la matrice de la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ dans la base $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Correction

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\lambda_2(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+\lambda_3\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0_F}$.
   Donc, $(\lambda_1+\lambda_2)\overrightarrow{a}+(\lambda_1-\lambda_2)\overrightarrow{b}+\lambda_3\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0_F}$.
   Or, la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est libre donc $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1-\lambda_2=0 \\ \lambda_3=0 \end{cases}$
   Donc, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ et $\lambda_3=0$. Donc, la famille $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est libre.
2. La famille $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est constituée de 3 vecteurs en dimension 3 et c'est une famille libre donc c'est une base de F.
3. On va décomposer les trois vecteurs de la base initiale dans la nouvelle base.
   $\begin{cases} \overrightarrow{a}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}) \\ \overrightarrow{b}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}) \\ \overrightarrow{c}=\overrightarrow{c} \end{cases}$

   Donc, $\mathrm{mat}_{(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 On considère l'ensemble $E=\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+4u_{n+1}+4u_n=0\right\}$.

1. Montrer que E est un sous−espace vectoriel de dimension finie.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Correction

1. L'équation caractéristique associée est $\mathbf{X}^2+4\mathbf{X}+4=0$ et -2 est solution double.
   Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E \Leftrightarrow \exists\,(A,B)\in\mathbb{R}^2 \;/\; \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(A+nB)(-2)^n=A(-2)^n+Bn(-2)^n$.
   Donc,
   $$E=\mathrm{Vect}\left(((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}},(n(-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$
   C'est un sous−espace vectoriel de l'ensemble des suites et il admet une famille génératrice donc il est de dimension finie.
2. Montrons que cette famille est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda_1(-2)^n+\lambda_2 n(-2)^n=0$.
   Donc, $\begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_1(-2)+\lambda_2.(-2)=0 \end{cases}$
   Donc, $\lambda_1=\lambda_2=0$.
   La famille est libre. C'est donc une base de E et $\dim(E)=2$.