

Chapitre 27 : Applications linéaires et matrices

Table des matières

1	Généralités.	2
1.1	Définitions.	2
1.2	Opérations sur les applications linéaires.	2
1.3	Applications linéaires déjà rencontrées.	3
2	Noyau et Image d'une application linéaire.	3
2.1	Noyau et injectivité.	3
2.2	Image et surjectivité.	4
3	Matrices d'une application linéaire.	4
3.1	Image d'une base par une application linéaire.	5
3.2	Définition.	5
3.3	Matrices et opérations sur les applications linéaires.	6
3.4	Application canoniquement associée à une matrice.	7
4	Rang d'une application linéaire.	7
4.1	Définition.	7
4.2	Lien avec les autres notions de rang.	7
4.3	Théorème du rang.	8

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ fixés dans tout le chapitre.

1 Généralités.

1.1 Définitions.

Définition 1.

On appelle application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n toute fonction $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

1. $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^p)^2, f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.
2. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^p, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n .

Exemple 2.

1. Soit $E = F = \mathbb{R}$. Montrer que $f : x \mapsto 3x$ est une application linéaire.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit $F = \mathbb{R}$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto 3x + 2y$ est une application linéaire.
3. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit $F = \mathbb{R}^2$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto (3x, 2y)$ est une application linéaire.

Théorème 3.

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Si f est linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n alors $f(0_p) = 0_n$.

Théorème 4.

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$. On a équivalence entre

1. f est linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n .
2. $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^p)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = f(\vec{u}) + \lambda f(\vec{v})$.

Exemple 5. Soit $E = F = \mathbb{R}^2$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est une application linéaire.

Exemple 6. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $F = \mathbb{R}$. Montrer que $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k$ est une application linéaire.

Exemple 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $E = \mathbb{K}_n[\mathbf{X}]$ et $F = \mathbb{K}_{n-1}[\mathbf{X}]$. Montrer que $f : P \mapsto P'$ est linéaire.

1.2 Opérations sur les applications linéaires.

Théorème 8.

L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

$$\forall(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)^2, \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$$

Une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire.

Théorème 9.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$. Alors, $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.
(La composée d'applications linéaires est une application linéaire)

Exemple 10. $f : \begin{cases} \mathbb{K}[\mathbf{X}] \rightarrow \mathbb{K} \\ P \mapsto P'(0) \end{cases}$ est une application linéaire.

Théorème 11.

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$.
Si f est linéaire et bijective de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n alors f^{-1} est linéaire et bijective de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .
(La bijection réciproque d'une bijection linéaire est linéaire)

1.3 Applications linéaires déjà rencontrées.

Exemple 12.

2 Noyau et Image d'une application linéaire.**2.1 Noyau et injectivité.****Définition 13.**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
On appelle noyau de f et on note $\text{Ker}(f)$ l'ensemble des antécédents de $\vec{0}_n$ par f .

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } f(\vec{u}) = \vec{0}_n \right\}$$

Exemple 14. Déterminer le noyau de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \end{cases}$.

Exemple 15. Déterminer le noyau de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y, y - x)$.

Exemple 16. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + y, x + z) \end{cases}$$

Déterminer $\text{ker } f$.

Théorème 17.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

1. $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p .
2. f est injective de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \left\{ \vec{0}_p \right\}$.

Exemple 18. Montrer que $A = \{P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}], P(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ de dimension finie. Donner une base de A .

2.2 Image et surjectivité.

Définition 19.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

On appelle image de f et on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble des images par f des vecteurs de \mathbb{R}^p :

$$\text{Im}(f) = f(\mathbb{R}^p) = \{f(\vec{u}), \vec{u} \in \mathbb{R}^p\} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \exists \vec{u} \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \vec{v} = f(\vec{u})\}$$

Exemple 20. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, -x + 3y, 2y) \end{cases}$$

Déterminer $\text{Im}(f)$.

Exemple 21. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto x + 4y - 2z \end{cases}$$

Déterminer $\text{Im}(f)$.

Théorème 22.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

1. $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
2. f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

Exemple 23. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + y + z, x - y + z, x + y - z) \end{cases}$.

Montrer que f est bijective de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

Exemple 24. La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}[\mathbf{X}] & \rightarrow \mathbb{R}[\mathbf{X}] \\ P & \mapsto P' \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ?

3 Matrices d'une application linéaire.

Remarque 25. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Pour définir complètement f , de quels vecteurs a-t-on besoin ?

Théorème 26.

Il existe une unique application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 telle que

$$\begin{cases} f(1, 0, 0) = (1, 0) \\ f(0, 1, 0) = (0, 1) \\ f(0, 0, 1) = (1, 1) \end{cases}$$

3.1 Image d'une base par une application linéaire.

Théorème 27.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de \mathbb{R}^p . Soit $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . Il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(\vec{e}_i) = \vec{v}_i$.

Remarque 28. Cette proposition dit qu'une application linéaire est entièrement définie par l'image des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.

Exemple 29. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(1, 0, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (1, 2)$ et $f(0, 0, 1) = (2, 1)$ et la déterminer.

Exemple 30. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f(2, 1) = (1, 1, 0)$ et $f(-1, 1) = (0, 1, 1)$ et la déterminer.

3.2 Définition.

Définition 31.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Soit $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de \mathbb{R}^p . Soit $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une base de \mathbb{R}^n .

On appelle matrice de l'application f dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F la matrice de la famille de vecteurs $f(\mathcal{B}_E)$ dans la base \mathcal{B}_F .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_1 \\ \vdots \\ \vec{f}_i \\ \vdots \\ \vec{f}_n \end{array} \begin{array}{ccccc} f(\vec{e}_1) & \dots & f(\vec{e}_j) & \dots & f(\vec{e}_p) \\ \left(\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,q} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,q} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,j} & \dots & a_{p,q} \end{array} \right) \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

Exemple 32. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto \left(x + y, x - y, \frac{x + y}{2}\right) \end{cases}$

Exprimer la matrice de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 .

Exemple 33. Soient \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{C} = ((1, 1), (1, -1))$. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x + 2y, 2x + y) \end{cases}$$

1. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.
2. Montrer que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^2 .
3. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(f)$, $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$.

Théorème 34.

Soient \mathcal{B}_E une base de \mathbb{R}^p et \mathcal{B}_F une base de \mathbb{R}^n .
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^p$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(\vec{u})) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{u})$$

Les coordonnées de $f(\vec{u})$ dans la base \mathcal{B}_F sont obtenues en calculant $M.X$.

3.3 Matrices et opérations sur les applications linéaires.**Théorème 35.**

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit \mathcal{B}_E une base de \mathbb{R}^p et \mathcal{B}_F une base de \mathbb{R}^n .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f + \lambda.g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \lambda.\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g).$$

Théorème 36.

Soit \mathcal{B}_E une base de \mathbb{R}^p , \mathcal{B}_F une base de \mathbb{R}^n et \mathcal{B}_G une base de \mathbb{R}^q .
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f).$$

Remarque 37. Le produit matriciel, comme la composée, ne sont pas commutatifs donc l'ordre est important.

Théorème 38.

Soit \mathcal{B}_E une base de \mathbb{R}^p . Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ et soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^k) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f \circ \dots \circ f) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f))^k.$$

Remarque 39. Il est donc utile de savoir calculer facilement des puissances de matrices carrées.

Exemple 40. Soient

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + y + z, y + z) \end{cases}, \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) & \mapsto (x, y, x - y, x + y) \end{cases}$$

Peut-on composer f et g ? Dans quel ordre? Déterminer la composée qui est définie et sa matrice dans les bases canoniques.

Théorème 41.

Soit \mathcal{B}_E une base de \mathbb{R}^p . Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$.
Si f est bijective de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^p alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ est une matrice inversible et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f))^{-1}$$

Remarque 42. Il est donc utile de savoir inverser facilement des matrices.

3.4 Application canoniquement associée à une matrice.

Théorème 43.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

L'application suivante est linéaire :

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto AX \end{cases}$$

On l'appelle application linéaire canoniquement associée à la matrice A .

Exemple 44. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'application canoniquement associée à A .

Exemple 45. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit f l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 canoniquement associée à M .

Expliciter f, f^2, f^3 .

4 Rang d'une application linéaire.

4.1 Définition.

Définition 46.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

On appelle rang de f et on note $\text{rg}(f)$ la dimension de son image : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

Théorème 47.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de \mathbb{R}^p . Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

Alors, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_p))$.

Exemple 48. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \end{cases}$

Déterminer le noyau, l'image et le rang de f .

4.2 Lien avec les autres notions de rang.

Théorème 49.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Le rang de A est égal au rang du système associé à $A : AX = 0_n$.
2. Le rang de A est égal au rang de l'application linéaire canoniquement associée à A .
3. Le rang de A est égal au rang de la famille de vecteurs formée par les colonnes de A .

Exemple 50. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A de deux manières.

Exemple 51. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + 2y, -y + z, x + y + z) \end{cases}$. Déterminer le rang de f .

Exemple 52. Soit $\mathcal{F} = ((0, 1, 2), (-1, -1, 1), (1, 0, 2), (0, -1, 3))$. Déterminer le rang de \mathcal{F} .

4.3 Théorème du rang.

Théorème 53 (Théorème du rang).

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et F un \mathbb{R} -espace vectoriel.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) .$$

Exemple 54. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$
Déterminer le rang de f puis une base de $\text{Im}(f)$.

Théorème 55.

Soient E et F deux R -espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est injective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(E)$.
2. f est surjective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(F)$.
3. f est bijective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(E) = \dim F$.

Théorème 56.

Soient E et F deux R -espaces vectoriels **de même dimension finie**. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On a équivalence entre :

1. f est bijective de E dans F
2. f est injective de E dans F
3. f est surjective de E dans F

Exemple 57. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + z, y + z, x + y + z) \end{cases}$
Montrer que f est bijective de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

Exemple 58. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[\mathbf{X}] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto (P(1), P(2), P(3)) \end{cases}$

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}_2[\mathbf{X}]$ dans \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer son application réciproque. On pourra commencer par calculer la matrice de f^{-1} dans une base bien choisie.