Exercice 1

1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

(a) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{cases}$

(b) $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y+5 \end{cases}$

(c) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y, x-z) \end{cases}$

(d) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (z,x,y) \end{cases}$

(e) $h : \begin{cases} \mathbb{R}_2[\mathbf{X}] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(0)+P(1) \end{cases}$

(f) $\phi : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto f'+f \end{cases}$

2. Lorsque c'est possible, donner leur matrice dans les bases canoniques associées.

Correction

1. Soit $u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$u+\lambda.v = (x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2)$.

$$f(u+\lambda.v) = x_1+\lambda x_2+y_1+\lambda y_2 = x_1+y_1+\lambda(x_2+y_2) = f(u)+\lambda.f(v)$$

Par la caractérisation, f est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.
$f(1,0)=1$ et $f(0,1)=1$ donc $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. $f(0,0) \neq 0$ donc f n'est pas linaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$u+\lambda.v = (x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)$.

$$\begin{aligned} f(u+\lambda.v) &= (x_1+\lambda x_2+y_1+\lambda y_2 \ , \ x_1+\lambda x_2-z_1-\lambda z_2) \\ &= (x_1+y_1 \ , \ x_1-z_1)+\lambda(x_2+y_2 \ , \ x_2-z_2) \\ &= f(u)+\lambda.f(v) \end{aligned}$$

donc f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.
$f(1,0,0) = (1,1) = 1(1,0)+1(0,1)$, $f(0,1,0)=(1,0)$ et $f(0,0,1)) = (0,-1) = -1(0,1)$ donc
$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

4. Soit $(u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2$. $\exists\,(x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2) \in \mathbb{R}^6$ tel que $u=(x_1,y_1,z_1)$ et $v=(x_2,y_2,z_2)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$u+\lambda.v = (x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)$.

$$\begin{aligned} f(u+\lambda.v) &= (z_1+\lambda z_2 \ , \ x_1+\lambda x_2 \ , \ y_1+\lambda y_2) \\ &= (z_1,x_1,y_1)+\lambda(z_2,x_2,y_2) \\ &= f(u)+\lambda f(v) \end{aligned}$$

donc f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.

$f(1,0,0)=(0,1,0)$, $f(0,1,0)=(0,0,1)$ et $f(0,0,1)=(1,0,0)$ donc $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

5. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$f(P+\lambda.Q) = (P+\lambda.Q)(0)+(P+\lambda.Q)(1) = P(0)+\lambda.Q(0)+P(1)+\lambda.Q(1)$

$= P(0) + P(1) + \lambda(Q(0) + Q(1)) = f(P) + \lambda f(Q)$.
Par la caractérisation, f est linéaire de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.
$f(1) = 2$ et $f(\mathbf{X}) = 1$ et $f(\mathbf{X}^2) = 1$ donc $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

6. Soit $(f, g) \in \left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\phi(f + \lambda g) = (f + \lambda g)' + f + \lambda g = f' + f + \lambda(g' + g) = \phi(f) + \lambda\phi(g)$$

donc ϕ est linéaire de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
L'espace de départ n'est pas de dimension finie donc il n'est pas possible d'écrire la matrice de f.

Exercice 2 Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) \mapsto (x + y, 0, z, z) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer le noyau de f et donnez en une base.
3. Déterminer l'image de f et donnez en une base.
4. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Correction

1. Soient $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$u + \lambda.v = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2, t_1 + \lambda t_2)$.

$$\begin{array}{rcl} f(u + \lambda.v) & = & (x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2 \ , \ 0 \ , \ z_1 + \lambda z_2 \ , \ z_1 + \lambda z_2) \\ & = & (x_1 + y_1 \ , \ 0, z_1, z_1) + \lambda(x_2 + y_2 \ , \ 0, z_2, z_2) \\ & = & f(u) + \lambda.f(v) \end{array}$$

donc f est linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$.

2. $\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ (x + y, 0, z, z) = (0, 0, 0, 0)\right\} = \left\{(x, -x, 0, t) \in \mathbb{R}^4\right\}$
$=\mathrm{Vect}((1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$.
Cette famille est libre car les vecteurs sont non colinéaires , c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
Donc, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.

3. $\mathrm{Im}(f) = \{(x + y, 0, z, z), \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ $=\mathrm{Vect}((1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ $=\mathrm{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$.

Cette famille est libre car les vecteurs sont non colinéaires, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.
Donc, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

4. Pour obtenir la matrice dans la base canonique, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.
$f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$, $f(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$, $f(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 1, 1) = (0, 0, 1, 0) + (0, 0, 0, 1)$
et $f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$ donc $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Exercice 3 Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Correction

1. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. $\exists\,(x_1,x_2,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $u=(x_1,y_1)$ et $v=(x_2,y_2)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $u+\lambda.v = (x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2)$.

$$\begin{array}{rcl} f(u+\lambda.v) & = & (x_1+\lambda x_2+y_1+\lambda y_2\ ,\ x_1+\lambda x_2-y_1-\lambda y_2) = (x_1+y_1\ ,\ x_1-y_1)+\lambda(x_2+y_2\ ,\ x_2-y_2) \\ & = & f(u)+\lambda f(v) \end{array}$$

   donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. On va utiliser la caractérisation de la bijectivité pour les applications linéaires.

$$\mathrm{Ker}(f) = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ /\ (x+y,x-y)=(0,0)\Big\} = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x+y=0 \text{ et } x-y=0\Big\} = \{(0,0)\}$$

   Donc, f est injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   De plus, puisque l'espace vectoriel de départ et d'arrivée ont la même dimension, f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   Soit $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $\exists!\ u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(u)=v$. Donc, $(x+y,x-y)=(a,b)$.
   $\Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \Rightarrow u = \left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a-b}{2}\right)$.
   Ainsi, $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (a,b) \mapsto \left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a-b}{2}\right) \end{cases}$
3. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\mathcal{B}=((1,0),(0,1))$.
   $f(1,0)=(1,1)=1(1,0)+1(0,1)$ et $f(0,1)=(1,-1)=1(1,0)-1(0,1)$.
   Donc, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1. Montrer, par analyse et synthèse, qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que
   $f(1,0,0)=(1,0,0)$, $f(0,1,0)=(1,1,0)$ et $f(0,0,1)=(1,1,1)$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Correction

1. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Analyse : Supposons qu'il existe f une application linéaire telle que $f(1,0,0)=(1,0,0)$, $f(0,1,0)=(1,1,0)$ et $f(0,0,1)=(1,1,1)$.

$$\begin{array}{rcl} f(u)=f(x,y,z) & = & xf(1,0,0)+yf(0,1,0)+zf(0,0,1) = x(1,0,0)+y(1,1,0)+z(1,1,1) \\ & = & (x+y+z\ ,\ y+z\ ,\ x) \end{array}$$

Synthèse : Soit f définie par $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(x+y+z\ ,\ y+z\ ,\ x)$.
Elle vérifie bien les conditions du problème.
De plus, f est unique par l'unicité obtenue dans l'analyse.

2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(x,y,z)=(0,0,0) \Leftrightarrow (x+y+z,y+z,x)=(0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{array}$$

Donc, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}}$. (Ainsi, f est injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$).

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.
Or, la famille $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$.
(Ainsi, f est surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$).

__Exercice 5__ Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} \right.$

1. Montrer que φ est linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que φ est bijective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

__Correction__

1. Soit $(M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\varphi(M + \lambda.N) = {}^t(M + \lambda.N) = {}^tM + \lambda{}^tN = \varphi(M) + \lambda\varphi(N)$$
Par la caractérisation, φ est linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On va utiliser la caractérisation des applications linéaires bijectives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = 0\} = \{0\}$. Donc, f est injective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - $\mathrm{Im}(\varphi) = \{{}^tM, \ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc, f est surjective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Finalement, φ est bijective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Posons $\mathcal{B} = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
$\varphi(e_1) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1$,
$\varphi(e_2) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3$,
$\varphi(e_3) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2$,
$\varphi(e_4) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_4$.
Donc, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

__Exercice 6__ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -7 & 12 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -4 & 7 & 10 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Correction Le rang n'est pas modifié par les opération élémentaires sur les lignes.

$$\mathrm{rg}(A) \underset{L_1 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathrm{rg}(B) \underset{L_1 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 11 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est échelonnée et elle a 3 pivots (non nuls) donc $\mathrm{rg}(C) = 3$.

On va étudier les différentes valeurs possibles pour a et b.

- Si $a = 0$: par échange des lignes (opérations élémentaires sur les lignes) on obtient : $\mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
  Cette matrice est échelonnée et
  - Si $b = 0$, $\mathrm{rg}(D) = 0$ (D est la matrice nulle)
  - Si $b \neq 0$, $\mathrm{rg}(D) = 4$.
- Si $a \neq 0$: on fait subir à D l'algorithme du pivot de Gauss : $L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{b}{a}L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{b}{a}L_2$ puis $L_4 \leftarrow L_4 - \dfrac{b}{a}L_3$.
  Ainsi, $\mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b^2}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b^3}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a - \dfrac{b^4}{a^3} \end{pmatrix}$.
  cette matrice est échelonnée puisque $a \neq 0$. Elle est de rang au moins 3. Son rang dépend de la valeur du coefficient en bas à gauche.

$$\begin{aligned} a - \frac{b^4}{a^3} = 0 &\iff \frac{a^4 - b^4}{a^4} = 0 \\ &\iff a^4 = b^4 \\ &\iff \left(\frac{b}{a}\right)^4 = 1 \text{ (car } a \neq 0) \\ &\iff \frac{b}{a} \in \{1, -1\} \end{aligned}$$

  Ainsi :
  - Si $a \neq 0$ et $b \in \{a, -a\}$, alors $\mathrm{rg}(D) = 3$.
  - Si $a \neq 0$ et $b \notin \{a, -a\}$, alors $\mathrm{rg}(D) = 4$.

Exercice 7 Soit f l'application linéaire canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 2 & -14 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter f, $f^2(= f\circ f)$ et f^3.
2. Déterminer une base et la dimension de $\ker f$.
3. Déterminer une base et la dimension de $\ker f^2$.
4. Déterminer $\ker f^3$.

Correction

1.
   - La matrice M est de taille 3 donc l'application linéaire f est définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
     Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Les coordonnées de $f(u)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont données par $M.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-14y+2z\\x-4y\\x-10y+2z\end{pmatrix}$.
     Donc, $f:\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\(x,y,z)\mapsto(2x-14y+2,x-4y,x-10y+2z)\end{cases}$
   - On sait que la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de f^2 est la matrice M^2.
     Or, $M^2=\begin{pmatrix}-8&8&8\\-2&2&2\\-6&6&6\end{pmatrix}$. Donc, $f^2:\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\(x,y,z)\mapsto(-8x+8y+8z,-2x+2y+2z,-6x+6y+6z)\end{cases}$
   - On sait que la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de f^3 est la matrice M^3.
     Or, $M^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Donc, $f^3:\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\(x,y,z)\mapsto(0,0,0)\end{cases}$
2. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$u\in\mathrm{Ker}(f)\quad\Leftrightarrow\quad(2x-14y+2z,x-4y,x-10y+2z)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-14y+2z=0\\x-4y=0\\x-10y+2z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2x-14y+2z=0\\6y-2z=0\\-6y+2z=0\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}2x-14y+2z=0\\z=3y\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}x=4y\\z=3y\end{cases}$$

   Donc, $\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}((4,1,3))}$.
3. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$u\in\mathrm{Ker}(f^2)\Leftrightarrow(-8x+8y+8z,-2x+2y+2z,-6x+6y+6z)=(0,0,0)\Leftrightarrow -x+y+z=0$$

   Donc, $\boxed{\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))}$.
   Cette famille est libre, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f^2))=2}$.
4. $f^3=0$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f^3)=\mathbb{R}^3}$.

Exercice 8 [**]

1. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f^2\neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^3=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
   (a) Justifier qu'il existe $u\in\mathbb{K}^3$ tel que $f^2(u)\neq 0_3$.
   (b) Montrer que la famille $(u,f(u),f^2(u))$ est libre. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$g\circ f=0\Leftrightarrow\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(g).$$

Correction

1. (a) $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ donc il existe au moins un vecteur u de $\mathbb{K}^3$ tel que $f(u) \neq 0_{\mathbb{K}^3}$.

   (b) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \lambda_3 f^2(u) = 0_3$.
   On compose par f linéaire : $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) + \lambda_3 f^3(u) = f(0_{\mathbb{K}^3}) = 0_3$.
   Or, $f^3(u) = 0_3$ donc $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) = 0_3$.
   On compose de nouveau par f linéaire : $\lambda_1 f^2(u) + \lambda_2 f^3(u) = 0_3$.
   Or, $f^3(u) = 0_3$ donc $\lambda_1 f^2(u) = 0_3$.
   Or, $f^2(u) \neq 0_3$ donc $\boxed{\lambda_1 = 0}$.
   En reprenant $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$, on en déduit que $\boxed{\lambda_2 = 0}$.
   Puis, en reprenant $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) + \lambda_3 f^3(u) = 0_3$, on en déduit que $\boxed{\lambda_3 = 0}$.
   Finalement, $\boxed{(u, f(u), f^2(u)) \text{ est libre}}$.
   On est dans un espace vectoriel de dimension 3 donc, toute famille libre de 3 vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $\boxed{(u, f(u), f^2(u)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

   (c) Posons $e_1 = u$, $e_2 = f(u)$ et $e_3 = f^2(u)$.
   $f(e_1) = f(u) = e_2$, $f(e_2) = f^2(u) = e_3$ et $f(e_3) = f^3(u) = 0_3$ donc
   $$\boxed{\mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2. On raisonne par double implication.

   $\Rightarrow$: Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. $\exists y \in E$ tel que $f(y) = x$. Donc $g(x) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) = 0$.
   Donc $x \in \mathrm{Ker}(g)$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

   $\Leftarrow$: Soit $x \in E$. $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Or, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$ donc $g(f(x)) = 0$.
   Donc, $g \circ f = 0$.