

**Exercice 1**

1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a) } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases} & \text{(d) } f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (z, x, y) \end{cases} \\
 \text{(b) } g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y + 5 \end{cases} & \text{(e) } h : \begin{cases} \mathbb{R}_2[\mathbf{X}] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto P(0) + P(1) \end{cases} \\
 \text{(c) } f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x - z) \end{cases} & \text{(f) } \phi : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' + f \end{cases}
 \end{array}$$

2. Lorsque c'est possible, donner leur matrice dans les bases canoniques associées.

**Exercice 2** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) \mapsto (x + y, 0, z, z) \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^4$ .
2. Déterminer le noyau de  $f$  et donnez en une base.
3. Déterminer l'image de  $f$  et donnez en une base.
4. Déterminer sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 3** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  et déterminer sa bijection réciproque  $f^{-1}$ .
3. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 4**

1. Montrer, par analyse et synthèse, qu'il existe une unique application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  telle que  
 $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ ,  $f(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$  et  $f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$ .
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

**Exercice 5** Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto {}^t M \end{cases}$

1. Montrer que  $\varphi$  est linéaire de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $\varphi$  est bijective de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
3. Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 6** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -7 & 12 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -4 & 7 & 10 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

**Exercice 7** Soit  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $M = \begin{pmatrix} 2 & -14 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -10 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Expliciter  $f$ ,  $f^2 (= f \circ f)$  et  $f^3$ .
2. Déterminer une base et la dimension de  $\ker f$ .
3. Déterminer une base et la dimension de  $\ker f^2$ .
4. Déterminer  $\ker f^3$ .

**Exercice 8** [\*\*]

1. Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  telle que  $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$  et  $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ .
  - (a) Justifier qu'il existe  $u \in \mathbb{K}^3$  tel que  $f^2(u) \neq 0_3$ .
  - (b) Montrer que la famille  $(u, f(u), f^2(u))$  est libre. En déduire que c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
  - (c) Déterminer la matrice de  $f$  dans cette base.
2. Soient  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g).$$