BCPST 1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°8

Samedi 25 mai 2022

– Espaces Vectoriels - Intégration –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter. **Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.** N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \int_1^e t^2 \ln^n(t)\,dt$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n existe.
2. Calculer I_1. On pourra faire une intégration par parties.
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante, positive.
4. Montrer que la suite (I_n) converge et donner un encadrement de sa limite.
5. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}. On pourra faire une intégration par parties dans I_{n+1} en dérivant $t \mapsto \ln^{n+1}(t)$ et en intégrant $t \mapsto t^2$.
6. En déduire la limite de (I_n) puis un équivalent de I_n.

Exercice 2 : endomorphismes nilpotents.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & -14 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est dit nilpotent s'il existe un entier naturel k tel que f^k est l'endomorphisme nul, noté $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
Si f est nilpotent, le plus petit entier p vérifiant $f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ est appelé indice de nilpotence de f. Il vérifie

$$f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \text{ et } f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.$$

Avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ (application identité de $\mathbb{R}^3$)

Partie I - Un exemple.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -14 & -4 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.
2. Déterminer une base de $\ker f$. En déduire sa dimension.
3. Quel est le rang de f ?
4. Soit $u = (0,1,0)$. On pose $v = f(u)$ et $w = f(v)$. Déterminer les vecteurs v et w.
5. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

Partie II - Soit f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^3$. Soit $p \in \mathbb{N}$ son indice de nilpotence.

1. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{p-1}(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f^p(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
2. Montrer que la famille $(u, f(u), \dots f^{p-1}(u))$ est une famille libre.
3. En déduire que $p \leqslant 3$.
4. On suppose dans cette question que $p = 3$.
   (a) Le vecteur u étant celui déterminé question 1, montrer que $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice de f dans cette base (au départ et à l'arrivée).
   Quel est le rang de f ?
5. On suppose dans cette question que $p = 2$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. En déduire que $\dim \ker f \geqslant 2$.
   (b) Montrer que $\dim \ker f = 2$.
   (c) Le vecteur u étant celui de la question 1, montrer que $f(u) \in \ker f$ puis justifier qu'il existe $v \in \ker f$ tel que $(f(u), v)$ soit une base de $\ker f$.
   (d) Montrer que $(u, f(u), v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.
   Quel est le rang de f ?
6. Si $p = 1$, déterminer f.