

Exercice 1.

1. On commence par montrer que cette famille est génératrice de \mathbb{R}^3 .
- Tout d'abord, u_1, u_2 et u_3 appartiennent à \mathbb{R}^3 donc $\text{vect}(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^3$.
 - Ensuite, soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ fixé quelconque.
- Supposons qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xu_1 + yu_2 + zu_3 = (a, b, c)$ (E).

$$\text{Donc, } \begin{cases} 2x + 2y + z = a \\ y - z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$\text{Donc, } \begin{cases} x = 2a - b - 3c \\ y = -a + b + 2c \\ z = -a + 2c \end{cases}.$$

Synthèse : Soit $x = 2a - b - 3c, y = -a + b + 2c$ et $z = -a + 2c$.

Alors, $xu_1 + yu_2 + zu_3 = (a, b, c)$.

$\mathbb{R}^3 \subset \text{vect}(\mathcal{B})$.

On en déduit que $\mathbb{R}^3 = \text{vect}(\mathcal{B})$, c'est à dire que \mathcal{B} est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .

- Conclusion : \mathcal{B} est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 et $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Donc \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .

De plus, nous avons montré que tout vecteur (a, b, c) de \mathbb{R}^3 a pour coordonnées :

$(2a - b - 3c, -a + b + 2c, -a + 2c)$ dans cette base.

2. On sait que l'image d'une base détermine entièrement, et de manière unique, une application linéaire. C'est bien le cas ici.

Ainsi, il existe une unique application linéaire $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions données.

Par ailleurs, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} p(a, b, c) &= p((2a - b - 3c)u_1 + (-a + b + 2c)u_2 + (-a + 2c)u_3) \\ &= (2a - b - 3c)p(u_1) + (-a + b + 2c)p(u_2) + (-a + 2c)p(u_3) \\ &= (2a - b - 3c)u_1 \\ &= (2a - b - 3c)(2, 0, 1) \\ &= (4a - 2b - 6c, 0, 2a - b - 3c) \end{aligned}$$

Ainsi, l'application p est :

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (4x - 2y - 6z, 0, 2x - y - 3z)$$

3. Avec l'expression précédente, il est alors aisé de donner la matrice de p dans la base canonique :

$$\text{Mat}_{\text{can}}(p) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminons à présent la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(p)$:

$p(u_1) = 1.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$ (1ère colonne : 1 0 0)

$p(u_2) = p(u_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc la 2ème et la 3ème colonne sont des colonnes de zéros.

Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Pour vérifier que p est un projecteur, on calcule le carré de sa matrice représentative

$$(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(p))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(p).$$

Comme on retrouve la même matrice, on peut en conclure que $p \circ p = p$,

c'est-à-dire l'endomorphisme p est un projecteur.

Exercice 2.

1. • $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;

• la matrice nulle 0 appartient à \mathcal{F} car $0A = A \times 0 = 0$;

• $\forall M, N \in \mathcal{F}, \forall \lambda \in \mathbb{R} MA = AM$ et $NA = AN$ donc $(\lambda M + N)A = \lambda MA + NA = \lambda AM + AN = A(\lambda M + N)$ autrement dit $\lambda M + N \in \mathcal{F}$

\mathcal{F} est donc un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} y - z = a \\ x + z = b \\ -x - y - z = c \end{cases} \begin{matrix} \xleftrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \\ \\ \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \\ \\ \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \end{matrix} \begin{cases} x + z = b \\ y - z = a \\ -x - y - z = c \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \\ \\ \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \end{matrix} \begin{cases} x + y = b \\ y - z = a \\ -y = b + c \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \end{matrix} \begin{cases} x + z = b \\ y - z = a \\ -z = a + b + c \end{cases}$$

Le système est de rang 3 donc P est inversible.

$$\begin{cases} x + z = b \\ y - z = a \\ -z = a + b + c \end{cases} \begin{matrix} \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \\ \\ \xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \end{matrix} \begin{cases} x + z = b \\ y = -b - c \\ z = -a - b - c \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \end{matrix} \begin{cases} x = a + 2b + c \\ y = -b - c \\ z = -a - b - c \end{cases}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3. (a) $P^{-1}AP = C$ et $A = PCP^{-1}$.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\iff AM = MA \\ &\iff PCP^{-1}M = MPCP^{-1} \\ &\iff CP^{-1}M = P^{-1}MPCP^{-1} \\ &\iff CP^{-1}MP = P^{-1}MPC \\ &\iff P^{-1}MP \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

(c) $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = I_3 + C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a $CN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{pmatrix}$ et $NC = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 0 & f & -e \\ 0 & i & -h \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{G} &\iff CN = NC \\ &\iff \begin{cases} c = -b = -g = d = 0 \\ f = -h \\ e = i \end{cases} \\ &\iff N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix} \\ &\iff N = aD - fC - eC^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{G} = \text{Vect}(D, C, C^2)$.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1.D + \lambda_2.C + \lambda_3.C^2 = 0$.

Alors, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & -\lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.

Donc (D, C, C^2) est libre. C'est une base de \mathcal{G} et $\boxed{\text{la dimension de } \mathcal{G} \text{ est } 3}$.

4. (a) Soient N et N' deux éléments quelconques de \mathcal{G} .

$CNN' = NCN'$ car C et N commutent.

Donc, $CNN' = NCN' = NN'C$ car C et N' commutent. Donc $NN' \in \mathcal{G}$.

(b) Soient (x, y, z) les coordonnées de N dans la base (D, C, C^2) . Soit (x', y', z') les coordonnées de N' dans la base (D, C, C^2) .

$(xD + yC + zC^2)(x'D + y'C + z'C^2) = xx'D^2 + xy'DC + xz'DC^2 + yx'CD + yy'C^2 + yz'C^3 + zx'C^2D + zy'C^3 + zz'C^4$.

Or, $D^2 = D, DC = CD = 0, DC^2 = C^2D = 0, C^3 = -C$ et $C^4 = -C^2$.

Donc, $\boxed{NN' = xx'D - (yz' + zy')C + (yy' - zz')C^2}$.

Problème.

Partie A. Diagonalisation de u .

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le théorème du rang, appliqué à l'endomorphisme $f - \lambda \text{Id}_E$, permet d'écrire

$$\dim E = \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E) + \dim(\ker(u - \lambda \text{Id}_E)).$$

À partir de cette égalité, on trouve

$$\begin{aligned} \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E) < 3 &\iff \dim E - \dim(\ker(u - \lambda \text{Id}_E)) < 3 \\ &\iff \dim(\ker(u - \lambda \text{Id}_E)) > 0. \end{aligned}$$

Or, le seul sous-espace de E de dimension nulle est $\{0_E\}$. Être de dimension non nulle est donc équivalent à être différent de l'espace nul. On trouve ainsi l'équivalence recherchée.

2. (a)

$$\text{Mat}_{\text{can}}(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On s'intéresse au système (S_λ) , d'inconnues (x, y, z) ,

$$(A - \lambda I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1 - 2\lambda)x + y + z = 2a \\ x + (1 - 2\lambda)y - z = 2b \\ 4x - 4y - (2 + 2\lambda)z = 2c. \end{cases}$$

Pour que la matrice $(A - \lambda I_3)$ ne soit pas inversible, il faut et il suffit que le système ne soit pas de Cramer.

On applique donc la méthode du pivot de Gauss pour échelonner le système :

$$\begin{aligned} (S_\lambda) &\iff \begin{cases} x + (1 - 2\lambda)y - z &= 2b \\ (1 - (1 - 2\lambda)^2)y + (1 + (1 - 2\lambda))z &= 2(a - (1 - 2\lambda)b) \\ (-4 - 4(1 - 2\lambda))y + (4 - 2 - 2\lambda)z &= 2(c - 4b) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + (1 - 2\lambda)y - z &= 2b \\ 4\lambda(1 - \lambda)y + 2(1 - \lambda)z &= 2(a - (1 - 2\lambda)b) \\ -8(1 - \lambda)y + 2(1 - \lambda)z &= 2(c - 4b) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + (1 - 2\lambda)y - z &= 2b \\ 4\lambda(1 - \lambda)y + 2(1 - \lambda)z &= 2(a - (1 - 2\lambda)b) \\ 4(\lambda + 2)(1 - \lambda)y &= 2(a + (3 + 2\lambda)b - c). \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le système n'est pas de Cramer si, et seulement si, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$. On pose donc $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 1$.

3. Le système précédent, pour $a = b = c = 0$, devient pour λ_1 :

$$\begin{aligned} x + 5y - z &= 0 \\ -4y + z &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\ker(u + 2\text{Id}_E) &= \{(-y, y, 4y), y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((-1, 1, 4)).\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $(-1, 1, 4)$ est une base de $\ker(u + 2\text{Id}_E)$.

Et pour λ_2 , il ne reste plus qu'une équation : $x - y - z = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\ker(u - \text{Id}_E) &= \{(y + z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1)).\end{aligned}$$

Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre, et donc une base de $\ker(u + 2\text{Id}_E)$.

4. On vérifie aisément que la famille formée par ces trois vecteurs est libre. De plus, son cardinal est égal à la dimension de E . Donc, \mathcal{B}' est une base de E .

Par ailleurs, par construction, on a $u(e'_1) = -2e'_1$, $u(e'_2) = e'_2$ et $u(e'_3) = e'_3$. Donc la matrice représentative de u dans la base \mathcal{B}' est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie B. Recherche des «racines carrées» de u .

1. (a) Il suffit ici d'utiliser la définition de v pour démontrer l'égalité recherchée :

$$v \circ u = v \circ (v \circ v) = (v \circ v) \circ v = u \circ v.$$

Les deux endomorphismes u et v commutent donc bien.

- (b) On sait que $u(e'_1) = -2e'_1$. Avec la question 1 et la linéarité de v , on a :

$$u(v(e'_1)) = v(u(e'_1)) = v(-2e'_1) = -2v(e'_1).$$

L'égalité précédente peut aussi s'écrire $(u + 2\text{Id}_E)(v(e'_1)) = 0_E$, i.e. $v(e'_1)$ appartient au noyau de l'application $(u + 2\text{Id}_E)$. Or, on connaît une base de ce noyau : c'est le vecteur e'_1 . Ainsi, il existe donc un réel a tel que $v(e'_1) = ae'_1$.

- (c) Soit $x \in \ker(u - \text{Id}_E)$. Par conséquent, $u(x) = x$. D'où :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(x).$$

Ainsi, $v(x)$ appartient au noyau de l'application $(u - \text{Id}_E)$; d'après la question 3 de la partie A, on peut donc affirmer que $v(x) \in \text{Vect}(e'_2, e'_3)$.

- (d) D'après la question précédente, on peut affirmer que $v(e'_2)$ et $v(e'_3)$ sont des éléments de $\text{Vect}(e'_2, e'_3)$, c'est-à-dire qu'il existe quatre réels α , β , γ et δ tels que :

$$\begin{cases} v(e'_2) = \alpha e'_2 + \beta e'_3, \\ v(e'_3) = \delta e'_2 + \gamma e'_3. \end{cases}$$

- (e) On résume les résultats des deux questions précédentes par

$$\begin{aligned}f(e'_1) &= a \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3 \\ f(e'_2) &= 0 \cdot e'_1 + \alpha \cdot e'_2 + \beta \cdot e'_3 \\ f(e'_3) &= 0 \cdot e'_1 + \gamma \cdot e'_2 + \delta \cdot e'_3.\end{aligned}$$

On peut alors facilement écrire la matrice de u dans la base \mathcal{B}' :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

- (f) On sait que la composition des applications linéaires se traduit matriciellement par un produit. Ainsi, $u = v \circ v$ s'écrit donc matriciellement

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v))^2.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v))^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta\gamma & (\alpha + \delta)\gamma \\ 0 & (\alpha + \delta)\beta & \delta^2 + \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

D'où $a^2 = -2$.

2. Dans la question 1, on a vu que la supposition de l'existence d'un endomorphisme v tel que $v \circ v = u$ entraîne l'existence d'un réel a tel que $a^2 = -2$, ce qui est clairement impossible. Ainsi, il n'existe pas d'endomorphisme v tel que $v \circ v = u$.