BCPST
1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°8

28 mai 2025

– Espaces Vectoriels et Applications linéaires. –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions devront être soulignées ou encadrées.

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1.

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On considère les trois vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} u_1 &= (2,0,1),\\ u_2 &= (2,1,1),\\ u_3 &= (1,-1,1), \end{aligned}$$

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées d'un vecteur quelconque (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.
2. Justifier qu'il existe un unique endormorphisme p de $\mathbb{R}^3$ vérifiant
$$p(u_1) = u_1, \qquad p(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3}, \qquad p(u_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$
et expliciter cette application.
3. Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{can}(p)$ de l'application linéaire p dans la base canonique, puis la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(p)$ de p dans la base $\mathscr{B}$.
4. Montrer que p vérifie la relation : $p \circ p = p$.

Exercice 2.

On considère les matrices : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
et les ensembles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ définis par

$$\mathscr{F} = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\} \text{ et } \mathscr{G} = \{\mathrm{N} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } \mathrm{CN} = \mathrm{NC}\}.$$

1. Montrer - sans utiliser l'expression de A - que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   On admet le résultat pour $\mathscr{G}$.
2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. (a) Déterminer $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. On doit trouver une matrice de l'énoncé. En déduire une autre expression de A.
   (b) Montrer que pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ on a l'équivalence $\mathrm{M} \in \mathscr{F} \iff \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} \in \mathscr{G}$
   (c) On note $\mathrm{D} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{C}^2$ où I_3 est la matrice identité de taille 3.
   Déterminer les matrices C^2 et D.
   (d) Montrer que $\mathscr{G}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $(\mathrm{D}, \mathrm{C}, \mathrm{C}^2)$. Déterminer sa dimension.
4. (a) Montrer que le produit de deux matrices de $\mathscr{G}$ est dans $\mathscr{G}$.
   (b) Soient N et N′ deux éléments quelconques de $\mathscr{G}$. Déterminer les coordonnées de NN' dans la base $(\mathrm{D}, \mathrm{C}, \mathrm{C}^2)$ en fonction de celles de N et celles de N′.

Tournez s'il vous plait

Problème.

Dans ce problème, E désigne l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique. On définit l'endomorphisme u de E par

$$\forall(x,y,z)\in \mathrm{E},\ u(x,y,z)=\left(\frac{x+y+z}{2},\frac{x+y-z}{2},\frac{4x-4y-2z}{2}\right).$$

Partie A. Diagonalisation de u.

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Rg}(u-\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})<3 \iff \ker(u-\lambda\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

2. (a) Donner la matrice A de l'application linéaire u dans la base canonique.
   (b) Montrer qu'il existe deux valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$ pour lesquelles $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3$ ne soit pas de rang 3.
   On notera λ_1 la plus petite des 2 valeurs.
   Ces valeurs sont appelées valeurs propres de la matrice A *(et de l'application u).*
3. Trouver un vecteur e'_1 base de $\ker(u+2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et une famille de deux vecteurs (e'_2,e'_3) base de $\ker(u-\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.
4. Vérifier que la famille $\mathscr{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de E, et donner la matrice de u dans cette nouvelle base.

Partie B. Recherche des «racines carrées» de u.

1. On suppose dans cette question qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $v\circ v=u$.
   (a) Montrer que $v\circ u=u\circ v$. On dit que les endomorphismes u et v commutent.
   (b) Montrer que $u\big(v(e'_1)\big)=-2v(e'_1)$.
   En déduire que $v(e'_1)\in\ker(u+2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$, puis qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $v(e'_1)=ae'_1$.
   (c) Soit $x\in\ker(u-\mathrm{Id}_\mathrm{E})$. Montrer que $u(v(x))=v(x)$.
   En déduire que $v(x)\in\ker(u-\mathrm{Id}_\mathrm{E})$, puis que $v(x)\in\mathrm{Vect}\big(e'_2,e'_3\big)$.
   (d) En déduire qu'il existe quatre réels α, β, γ et δ tels que :

$$\begin{cases} v(e'_2)=\alpha e'_2+\beta e'_3,\\ v(e'_3)=\delta e'_2+\gamma e'_3.\end{cases}$$

   (e) En déduire que la matrice dans la base $\mathscr{B}'$ de v est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & \alpha & \gamma\\ 0 & \beta & \delta\end{pmatrix}.$$

   (f) Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)=(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v))^2$, et en déduire que $a^2=-2$.
2. Existe-t-il des endomorphismes v de E tels que $v\circ v=u$? Justifiez votre réponse.