Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes.

1. $A = \displaystyle\int_0^1 (x^2+3x+12)\mathrm{d}x$.
2. $B = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.
3. $C = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$.
4. $D = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.
5. $E = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$.
6. $F = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$.

Correction On va utiliser des primitives des fonctions sous l'intégrale.

1. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+3x+12)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+12x\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{3}{2}+12 = \frac{83}{6}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^3-1}{3}$.
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x = \Big[\ln(|x^2+x+2|)\Big]_{-1}^1 = \ln(4)-\ln(2) = \ln(2)$.
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{2x}{2(x^2+1)}\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln(|x^2+1)|}{2}\right]_{-1}^1 = 0$.
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^2 = \frac{\ln(2)^2}{2}$.
6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = [\ln(|\ln(x)|)]_2^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))$.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^2 x\sin(x)\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$
4. [*] $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x$

Correction

1. On pose $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ et par la formule de l'intégration par parties,
$$\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$$
2. On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ et par la formule de l'intégration par parties,
$$\begin{aligned}\int_1^2 x\sin(x)\mathrm{d}x &= \Big[-x\cos(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 (-\cos(x))\mathrm{d}x = -2\cos(2)+\cos(1)+\Big[\sin(x)\Big]_1^2 \\ &= -2\cos(2)+\cos(1)+\sin(2)-\sin(1)\end{aligned}$$
3. On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}} \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = 2\sqrt{3x+1} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et par la formule de l'intégration par parties,
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = \Big[2x\sqrt{3x+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{3x+1}\mathrm{d}x = 4 - 2\int_0^1 \sqrt{3x+1}\mathrm{d}x$$

Or, $x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{3x+1}$ sur $[0,1]$ donc

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = 4 - 2\left[\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 4 - \frac{4}{9}(8-1) = \frac{8}{9}$$

4. On pose $\begin{cases} u(x) = \mathbf{e}^{3x} \\ v'(x) = \cos(5x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 3\mathbf{e}^{3x} \\ v(x) = \dfrac{\sin(5x)}{5} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\int_1^2 \mathbf{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x = \left[\mathbf{e}^{3x}\frac{\sin(5x)}{5}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{3}{5}\mathbf{e}^{3x}\sin(5x)\mathrm{d}x = \mathbf{e}^6\frac{\sin(10)}{5} - \mathbf{e}^3\frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5}\int_1^2 \mathbf{e}^{3x}\sin(5x)\mathrm{d}x$$

On fait une seconde intégration par parties avec $\begin{cases} u(x) = \mathbf{e}^{3x} \\ v'(x) = \sin(5x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 3\mathbf{e}^{3x} \\ v(x) = -\dfrac{\cos(5x)}{5} \end{cases}$.

$$\int_1^2 \mathbf{e}^{3x}\sin(5x)\mathrm{d}x = \left[-\mathbf{e}^{3x}\frac{\cos(5x)}{5}\right]_1^2 + \frac{3}{5}\int_1^2 \mathbf{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x = -\mathbf{e}^6\frac{\cos(10)}{5} + \mathbf{e}^3\frac{\cos(5)}{5} + \frac{3}{5}\int_1^2 \mathbf{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \mathbf{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x &= \mathbf{e}^6\frac{\sin(10)}{5} - \mathbf{e}^3\frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5}\left(-\mathbf{e}^6\frac{\cos(10)}{5} + \mathbf{e}^3\frac{\cos(5)}{5} + \frac{3}{5}\int_1^2 \mathbf{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x\right) \\
\left(1+\frac{9}{25}\right)\int_1^2 \mathbf{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x &= \mathbf{e}^6\frac{\sin(10)}{5} - \mathbf{e}^3\frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5}\left(-\mathbf{e}^6\frac{\cos(10)}{5} + \mathbf{e}^3\frac{\cos(5)}{5}\right) \\
\int_1^2 \mathbf{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x &= \frac{25}{34}\left[\mathbf{e}^6\frac{\sin(10)}{5} - \mathbf{e}^3\frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5}\left(-\mathbf{e}^6\frac{\cos(10)}{5} + \mathbf{e}^3\frac{\cos(5)}{5}\right)\right]
\end{aligned}$$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x$ avec $t = x^3$ 2. $\displaystyle\int_1^{\mathbf{e}} \frac{(\ln x)^n}{x}\mathrm{d}x$ avec $t = \ln(x)$. 3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\sin(x)}\mathrm{d}x$ avec $t = \sin(x)$.

Correction

1. On utilise le changement de variables $t = x^3$. On a donc $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 3x^2$ donc $\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$.
De plus, pour $x = 0$, on a $t = 0$ et pour $x = 1$, on a $t = 1$.
Finalement,

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

2. On pose $t = \ln(x)$. On a donc $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$ donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.
De plus, pour $x = 1$, on a $t = 0$ et pour $x = \mathbf{e}$, on a $t = 1$. Finalement,

$$\int_1^{\mathbf{e}} \frac{(\ln x)^n}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

3. On pose $t = \sin(x)$. On a donc $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$ donc $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos(x)} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.
De plus, pour $x = 0$, on a $t = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{6}$, on a $t = \frac{1}{2}$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\sin(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \mathrm{d}x$ existe.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \mathrm{d}x$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$ existe.
   En utilisant une primitive, on obtient $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \mathrm{d}x$ existe.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$. $1 \leq 1+x^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissante de l'intégrale, on a donc $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$.
   Or, $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \mathrm{d}x = 0$.

Exercice 5

1. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 t^n \mathrm{d}t$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t = 0$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = 0$.
2. On va comparer l'intégrale à étudier à celle de la question précédente. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.
   Toute fonction continue sur un segment y est bornée (et atteint ses bornes).
   $\exists\, (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in [0,1],\ m \leq f(t) \leq M$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \forall t \in [0,1],\ m \leq f(t) \leq M \\
&\Rightarrow \quad \forall t \in [0,1],\ m.t^n \leq f(t).t^n \leq M.t^n \\
&\Rightarrow \quad \int_0^1 m.t^n \mathrm{d}t \leq \int_0^1 f(t).t^n \mathrm{d}t \leq \int_0^1 M.t^n \mathrm{d}t \\
&\Rightarrow \quad \frac{m}{n+1} \leq \int_0^1 f(t).t^n \mathrm{d}t \leq \frac{M}{n+1}
\end{aligned}$$

   Par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t = 0$.

Exercice 6

1. Déterminer la limite des suites proposées.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3+k^3}$. (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

2. Soit la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

   (a) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la suite $\left(\dfrac{b_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) En déduire la limite de la suite b en $+\infty$.

Correction On va modifier l'écriture pour faire apparaître la fonction f à utiliser dans le théorème des sommes de Riemann.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3+k^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

   où f est la fonction définie par $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^3}$. La fonction f est continue sur $[0,1]$. Par le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\ln(1+x^3)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{3}$$

   .

   Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{\ln(2)}{3}$.

   (b)

   Par produit de limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

   où f est la fonction définie par $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x\cos(\pi x)$. La fonction f est continue sur $[0,1]$. Par le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \int_0^1 x\cos(\pi x)\mathrm{d}x$$

   .

   On utilise alors une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^1 x\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \left[x\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}$$

   .

   Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi^2}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\frac{b_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

   où f est la fonction définie sur $[0,1]$ par $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sin(\pi x)$.
   La fonction f est continue sur $[0,1]$. Par le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} > 0$$

   . Donc, $\displaystyle\frac{b_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}$.

   (b) Par opération sur les équivalents, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n}{\pi}$.
   Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Exercice 7 On s'intéresse aux fonctions définies par $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto xf(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et celui de g.
2. Justifier que f est dérivable et déterminer sa dérivée.
3. Déterminer les variations de g.
4. Pour $x \in]-1, 0[$, proposer une minoration de $g(x)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x)$.

Correction

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^t}{1+t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ donc f est définie sur $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ -1 \notin [0, x]\} =]-1, +\infty[$. Par produit, la fonction g est aussi définie sur $]-1, +\infty[$.
2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^t}{1+t}$ est continue sur $]-1, +\infty[$. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et
$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ f'(x) = \frac{\mathbf{e}^x}{1+x}$$
3. Par produit, g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et
$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ g'(x) = \int_0^x \frac{\mathbf{e}^t}{1+t} dt + x.\frac{\mathbf{e}^x}{1+x}$$
On va étudier le signe de g'.
Soit $x \in [0, +\infty[$. Par positivité de l'intégrale et de l'exponentielle, $g'(x) \geq 0$.
Soit $x \in]-1, 0[$.
$$g'(x) = -\int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t} dt + x.\frac{\mathbf{e}^x}{1+x}$$
Donc, $g'(x) \leq 0$.
Finalement, g est décroissante sur $]-1, 0[$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
4. Soit $x \in]-1, 0[$. On a donc $g(x) = -x \displaystyle\int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t} \mathrm{d}t$.
$$\begin{aligned} &\forall t \in]-1, 0[,\ \frac{\mathbf{e}^t}{1+t} \geq \frac{\mathbf{e}^{-1}}{(1+t)} \\ \text{donc} \quad &\int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t} \mathrm{d}t \geq \int_x^0 \frac{1}{\mathbf{e}(1+t)} \mathrm{d}t \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\ \text{donc} \quad &\int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t} \mathrm{d}t \geq -\frac{\ln(1+x)}{\mathbf{e}} \\ \text{donc} \quad &-x\int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t} \mathrm{d}t \geq x\frac{\ln(1+x)}{\mathbf{e}} \ \text{car } -x \geq 0 \end{aligned}$$
Or, $\lim\limits_{x \to -1^+} x\dfrac{\ln(1+x)}{\mathbf{e}} = +\infty$. Par minoration, $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = +\infty$.

Exercice 8 Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \mathrm{d}t$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En utilisant le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, monter que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \mathrm{d}t$.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_{n+1} \leq I_n$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \dfrac{I_n}{I_{n+2}}$

5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
   On pourra utiliser une intégration par parties
6. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}}$.
7. Montrer que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})_{n \geq 0}$ est constante.
8. Montrer que $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ donc $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Par la formule du changement de variable,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \mathrm{d}t &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^n \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \mathrm{d}x \end{aligned}$$

2. $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}] \quad &, \quad 0 \leq \cos(t) < 1 \\ \text{donc } \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}] \quad &, \quad 0 \leq (\cos(t))^{n+1} < (\cos(t))^n \text{ car } \cos(t)^n > 0 \end{aligned}$$

   En intégrant sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on obtient

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

   De plus, la fonction $x \mapsto \cos(t)^n$ est strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donc $I_n > 0$.
4. On a montré que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$

   De plus, les termes de la suites sont strictement positifs donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; 1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour calculer I_{n+2} on va utiliser une intégration par parties avec
   $\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = \cos(t) \\ v(x) = (\cos(t))^{n+1} \end{array} \right.$ qui donne $\left\{ \begin{array}{l} u(x) = \sin(t) \\ v'(x) = -(n+1)\sin(t)(\cos(t))^n \end{array} \right.$
   Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[\sin(t)(\cos(t))^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2(\cos(t))^n dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(t)^2)(\cos(t))^n dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt \\ I_{n+2} &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \\ I_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2} I_n \end{aligned}$$

6. On a montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_n}{I_{n+2}} = \dfrac{n+2}{n+1}$.
   Or, par équivalent, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1} = 1$. Donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = 1$.
7. On calcule le premier terme pour avoir une idée de la valeur constante de cette suite : $I_0 I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
   On pose comme hypothèse de récurrence : $P(n)$: $(n+1)I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.
   $$\begin{aligned}(n+2)I_{n+1}I_{n+2} &= I_{n+1}(n+2)I_{n+2} = I_{n+1}(n+1)I_n \text{ par le calcul de la question 2.}\\ &= (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \text{ par hypothèse de récurrence.}\end{aligned}$$
   La suite est donc constante.
8. Puisque la valeur constante de la suite est non nulle, $(n+1)I_n I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.
   Or, $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$ et $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
   Donc, $nI_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.
   Donc, $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 9 [*] Par une double intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x(\arctan(x))^2 \mathrm{d}x$.
Penser à bien choisir les primitives.

Correction

On pose $\begin{cases} u(x) = (\arctan(x))^2 \\ v'(x) = x \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}\arctan(x) \\ v(x) = \dfrac{x^2+1}{2} \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\int_0^1 x(\arctan(x))^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2+1}{2}(\arctan(x))^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\arctan(x).\frac{x^2+1}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \arctan(x)\mathrm{d}x$$

On va appliquer une deuxième intégration par parties.

On pose $\begin{cases} u(x) = \arctan(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{d}x = \Big[x\arctan(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 x(\arctan(x))^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$.

Exercice 10 [*] *Comparaison suites-intégrales*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.
   (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. En utilisant la monotonie de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, montrer que
   $$\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}t$$
   .

(b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. En déduire que $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{k}$.

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \leq \int_1^n \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$.

(d) Montrer que $\ln(n) + \dfrac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$.

2. En déduire que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Correction

1. (a) Soit $t \in [k, k+1]$. Donc, $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$.

   Donc, par croissance de l'intégrale sur $[k, k+1]$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{k}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \dfrac{1}{k}\mathrm{d}t$.

   (b) Or, $\displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{k}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{k+1}$ donc $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{k}$.

   (c) On va ensuite additionner les inégalités précédentes.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

   On effectue un changement d'indice dans la somme de gauche et on applique la relation de Chasles dans l'intégrale pour obtenir

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

   (d) Or, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - 1 = S_n - 1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{n}$.

   De plus, $\displaystyle\int_1^n \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(n)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   Finalement, $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \dfrac{1}{n}$.

   En manipulant séparément les deux inégalités, on obtient $\ln(n) + \dfrac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$.

2. Soit $n \geq 2$.

   $\dfrac{\ln(n) + \frac{1}{n}}{\ln(n)} \leq \dfrac{S_n}{\ln(n)} \leq \dfrac{\ln(n)+1}{\ln(n)}$.

   Donc, $1 + \dfrac{1}{n\ln(n)} \leq \dfrac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$.

   En appliquant le théorème d'encadrement, on conclut que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 11 [**]

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 2]$.

   Étudier la limite, quand x tend vers 1, de $\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

2. Application : déterminer la limite, quand x tend vers 1, de $\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x \dfrac{t^3}{1+t^3}\mathrm{d}t$.

Correction

1. La fonction f est continue sur $[0, 2]$ donc elle admet des primitives sur $[0, 2]$.

   Soit F une primitive de f sur $[0, 2]$.

   Alors, $\forall x \in [1, 2]$, $\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{F(x) - F(1)}{x-1}$.

   On reconnait un taux d'accroissement donc $\displaystyle\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = F'(1) = f(1)$

2. On applique la question 1 à $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^3}$ qui est continue sur $[0,2]$.
   Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^3}{1+t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Exercice 12 [**] Soit $R > 0$.

1. Soit D l'aire du disque de centre $(0,0)$ et de rayon R.
   A l'aide d'un dessin, montrer que
$$D = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x$$
2. A l'aide du changement de variable $x = R\sin(u)$, montrer que
$$D = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\mathrm{d}u$$
3. Retrouver le résultat connu.