

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes.

1. $A = \int_0^1 (x^2 + 3x + 12)dx.$
2. $B = \int_0^1 e^{3x} dx.$
3. $C = \int_{-1}^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 2} dx.$
4. $D = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx.$
5. $E = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx.$
6. $F = \int_2^3 \frac{1}{x \ln(x)} dx.$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $\int_1^2 x \ln(x) dx$
2. $\int_1^2 x \sin(x) dx$
3. $\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{3x + 1}} dx$
4. [*] $\int_1^2 e^{3x} \cos(5x) dx$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\int_0^1 \frac{3x^2}{1 + x^6} dx$ avec $t = x^3$
2. $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$ avec $t = \ln(x).$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \sin(x)} dx$ avec $t = \sin(x).$

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\int_0^1 x^n dx$ existe et calculer sa valeur.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^2} dx$ existe.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in [0, 1], 0 \leq \frac{x^n}{1 + x^2} \leq x^n.$
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^2} dx.$

Exercice 5

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n dt.$
2. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}).$ Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0.$

Exercice 6

1. Déterminer la limite des suites proposées.
 - (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3 + k^3}.$
 - (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$
2. Soit la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$
 - (a) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la suite $\left(\frac{b_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}.$
 - (b) En déduire la limite de la suite b en $+\infty.$

Exercice 7 On s'intéresse aux fonctions définies par $f : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$ et $g : x \mapsto xf(x).$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et celui de $g.$
2. Justifier que f est dérivable et déterminer sa dérivée.
3. Déterminer les variations de $g.$
4. Pour $x \in]-1, 0[,$ proposer une minoration de $g(x).$ En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x).$

Exercice 8 Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N},$ soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*.$
En utilisant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t,$ monter que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt.$

2. Calculer I_0 et I_1 .
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+1} \leq I_n$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$.
5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
On pourra utiliser une intégration par parties
6. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}}$.
7. Montrer que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})_{n \geq 0}$ est constante.
8. Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 9 [*] Par une double intégration par parties, calculer

$$I = \int_0^1 x(\arctan(x))^2 dx.$$

Penser à bien choisir les primitives.

Exercice 10 [*] Comparaison suites-intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
 - (a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. En utilisant la monotonie de $t \mapsto \frac{1}{t}$, montrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$$

- (b) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. En déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

- (c) En déduire que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

- (d) Montrer que $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$.

2. En déduire que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 11 [**]

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 2]$.
Étudier la limite, quand x tend vers 1, de $\frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt$.
2. Application : déterminer la limite, quand x tend vers 1, de $\frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^3}{1+t^3} dt$.

Exercice 12 [**] Soit $R > 0$.

1. Soit D l'aire du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon R .
A l'aide d'un dessin, montrer que

$$D = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

2. A l'aide du changement de variable $x = R \sin(u)$, montrer que

$$D = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du$$

3. Retrouver le résultat connu.